RICERCHE SPERIMENTALI

SULLA

RESISTENZA VIVA DEI LEGNI

FATTE

DAL PROF. LUIGI PACINOTTI

E

DOTT. GIUSEPPE PERI

Estratto dal Cimento An. V.
Fasc. Luglio-Agosto, Settembre-Ottobre.

PISA

TIPOGRAFIA VANNUCCHI

1847

Il Problema della resistenza dei solidi che entrano nella composizione delle macchine e fanno parte delle costruzioni civili e idrauliche, è stato sempre uno de' più importanti soggetti di studio per gli uomini di scienza, e particolarmente pei costruttori. In questi ultimi tempi poi in cui una felice applicazione delle dottrine scientifiche fa sorgere come per incanto le più belle opere d'arte, e la necessità omai generalmente sentita di accorciar le distanze per raggiungere più prontamente che si può il perfezionamento sociale verso cui l'incessante sviluppo delle idee, e l'incipiente progresso sospinge tutti gli uomini del secolo, noi vediamo e la Teorica e la Pratica darsi vicendevolmente la mano, e l'una proporsi la soluzione analitica dei problemi più difficili in arte e l'altra saviamente applicarne i resultati. L'economia di tempo e di spesa è raggiunta per tale unione, e così più agevole e sicuro vien reso il compimento dei più arditi progetti.

Vi ha però un tal genere di Problemi in cui la natura gelosa tenta occultare le leggi di sua potenza alle investigazioni analitiche del filosofo; ed allora il campo si apre alle ipotesi che talvolta riescono infruttuose e mai sempre spargono di dubbj la via che ha da tenere chi vuol metterne in atto le conseguenze. In questi è la Teorica bisognosa della Pratica: e qui intendiamo dire degli studj che guidato da un sano criterio imprende il Fisico per via di accurate esperienze, onde sollevare in parte il velo di cui natura si cuopre. Nel numero di tai problemi è principalmente da porsi quello della resistenza dei solidi alla flessione: problema che per la sua difficoltà ha tenuto occupati gran numero di Fisici incominciando dal comun Padre Galileo. Noi pure altra volta tornammo a studiarlo su i legni colla mira di farci un idea più precisa del coeficiente d'elasticità, e le ricerche nostre consegnammo al giornale il Cimento che le registrò nel fascicolo di Luglio e Agosto An. III.

Ultimi in ordine al tempo e primi per l'importanza dei lavori sono stati ora Chevandier e Wertheim che anch'essi pei legni lo hanno trattato con una tale estensione da non potersi desiderare maggiore, e con quello spirito sottile che li distingue. Ma le resistenze non devono considerarsi solamente in ordine alle forze che agiscono per pressione; sì bene anche a quelle che le sviluppano per via di urti, e di scosse.

I ponti pensili hanno offerto uno studio importante sulla resistenza assoluta positiva delle verghe di ferro e delle funi formate in fili dello stesso metallo. Navier per il primo sottopose al calcolo l'effetto delle forze che agiscono in tali sistemi, e istituì esperienze opportune onde ridurre in numeri le formule che teoricamente avea determinato. Basta leggere a questo proposito l'interessantissima sua Memoria su i Ponti pensili. Dietro la sua scorta molti altri Ingegneri han fatto esperienze sullo stesso soggetto, all'occasione di dover costruire simili ponti, e ne hanno consegnati i resultati in appositi scritti. Nella bella versione italiana della succitata memoria fatta per cura dell'Ingegnere G. Corti, e pubblicata in Milano nel 1840, trovasi una relazione succinta dei lavori più interessanti eseguiti ai dì nostri. Laonde può ritenersi che sull'effetto degli urti o delle scosse che riceve una verga prismatica o cilindrica nella direzione della sua lunghezza, se non sono stati fatti degli studi sperimentali completi, esistono almeno tanti dati particolari da servire utilmente in casi simili ai Pratici. Il Poncelet nella sua introduzione alla meccanica industriale ha determinato di quanto si allungherà una verga prismatica sia che il peso che la stira resti libero all'azione della gravità senza alcuna velocità precedentemente acquistata, sia che cominci ad agire sulla verga dopo aver concepita una determinata velocità.

Ma per quanto è a nostra cognizione non esistono lavori speciali sulla resistenza respettiva, cioè su quella che si sviluppa nelle verghe prismatiche o cilindriche allorchè gli urti o le scosse si esercitano in direzione normale alla loro lunghezza. E non di rado si hanno esempi di sforzi simili esercitati sui pezzi che compongono una macchina o fanno parte di un'edifizio. Un ponte costruito sopra le catene e solo da queste sostenuto, può riguardarsi come un sistema connesso in modo da formare un solido prismatico che ha le sue estremità fisse nelle due sponde del fiume. Se un carro pesante lo attraversa esso produce delle scosse per tutta la sua lunghezza, a cagione dell'ineguaglianza del piano superiore; e queste scosse facendosi in direzione verticale si potranno considerare come normali all'asse longitudinale del ponte medesimo per la piccola saetta che convien dare alle catene. Quale sarà dunque l'abbassamento in ogni punto urtato del ponte? Il valicamento dei grandi corsi di acqua nelle strade a rotaje di ferro, e dove uno degli agenti più formidabili della natura trasporta con tanta celerità uomini e cose, si fa ordinariamente per mezzo di ponti costruiti sovra travi orizzontali che ordinariamente sono di legno e di piccola estensione. Ma in questi ultimi tempi essendosi per cura di Stephenson introdotto l'uso di farli di ferro con estensione grandissima, che sono quasi miracolo di arte, importa tanto più la ricerca degli effetti che può produrre su quei travi il passaggio più o men rapido del considerevole carico; sapendosi quanto facilmente inrigidisca questo metallo per la continuità delle vibrazioni e si cristallizzi per modo da rompersi, come un' amara esperienza ha provato in alcuni pezzi che facevano parte di macchine e di locomotive a vapore.

Per non dire di altri, questi due esempi bastano a far comprendere di quanto interesse possa essere lo studio della resistenza respettiva che si sviluppa nei solidi per un tal modo di agire delle forze.

La ricerca però dell' abbassamento dei diversi punti di una verga o di un trave orizzontale per il passaggio più o men celere di un carico, è uno de' problemi più complicati, e nei quali la Teoria ha bisogno di un certo numero di dati sperimentali per dipartirsi da principj più sicuri. Noi abbiamo eseguito un certo numero di esperienze su questo soggetto, e ne abbiamo dedotte alcune leggi generali le quali crediamo non affatto inutili specialmente nella Pratica, in cui si cerca di tener lontano più che si può il pericolo delle rotture. A cagione poi della imperfetta centratura delle ruote e di altre cause accidentali che possono sussistere nell' avanzamento del carico, produconsi bene spesso degli urti contro il piano stradale, i quali aumentano l' effetto del carico medesimo; e come nelle esperienze che si possono eseguire per le ricerche suindicate, è difficilissimo se non impossibile il distinguere la prima delle cause predette, così noi siamo stati costretti a prendere in particolare considerazione anche l' effetto separato di un urto violento che un trave orizzontale può ricevere in direzione normale alla sua lunghezza. In tal modo noi risolvevamo anche quest' altro Problema. « Se un peso cade da una certa altezza sovra un trave sostenuto orizzontalmente, di quanto farà abbassare il punto urtato » ? La soluzione di questo Problema è meno complicata di quella del primo, sebbene presenti non poche difficoltà nell'analisi quando si dovesse tener conto di tutte le cause accidentali che possono alterare i resultati di esse e che non è dato schivare nell'esecuzione delle esperienze. Pur non ostante noi abbiam tentato di ridurla a quei termini più semplici che abbiam potuto, e crediamo di esservi riusciti partendosi dalla cognizione dello sforzo o del peso che semplicemente posato sovra un punto del trave e lasciato libero a se stesso è capace di produrre in quel punto l'abbassamento prodottovi dal peso urtante. Ed ecco una nuova serie di esperienze, che siamo stati costretti naturalmente a fare dall'indole delle ricerche prime che ci eravamo proposte.

Nell'esposizione de'risultamenti avuti in questi differenti casi noi però non terremo l'ordine che abbiam seguito nel ricercarli, e cominceremo piuttosto da quelli somministrati dall'ultimo dei problemi enunciati, come il più semplice di tutti. Per tal modo questa Memoria verrà divisa in tre paragrafi come segue.

1.° Azione di un grave, che mentre si posa sovra un trave orizzontale resta libero a se stesso.

2.° Azione di un grave che cadendo da una certa altezza urta un trave orizzontale.

3.° Azione di un grave che scorre con velocità differenti sovra un trave orizzontale.

Noi siam lungi dal considerare questo lavoro come sufficiente a sodisfare a tutti i bisogni dell'arte; pure non crediamo far cosa ingrata presentandolo agli uomini di scienza come prova del nostro amore per essa, e come un saggio di quello che potrebbe farsi su tal soggetto da coloro che avessero maggior agio e mezzi più estesi di sperimentare.

§. 1.

Azione di un grave che mentre si posa sopra un trave orizzontale resta libero a se stesso.

Altra volta, come abbiamo detto, noi imprendevamo lo studio della resistenza elastica dei corpi e specialmente del legname da costruzione soggettando i pezzi in diversi modi a degli sforzi capaci di fletterli, o di allungarli, o di torcerli. E nella memoria da noi pubblicata nel citato giornale, concludevamo che le mutazioni di posto ottenute per l'elasticità nelle diverse parti dei legni, sono proporzionali alle forze che le hanno prodotte, non solo per gli sforzi più piccoli di quello competente al limite della perfetta elasticità, ma anche per gli sforzi assai prossimi alla rottura, purchè si avverta di non computare nell' effetto dell' elasticità l' alterazione permanente che si produce nel solido sia che provenga dalla natural mollezza del medesimo, sia che provenga dalla permanenza del carico.

Se abbiasi adunque un trave sostenuto orizzontalmente alle due estremità da due stabili appoggi, e mentre si posa sopra uno de' suoi punti M un peso π, lasciasi questo libero a se stesso, la caduta del peso o l' abbassamento del punto M si dovrà determinare tenendo conto dell' azione contemporanea della reazione elastica e dell' azione della gravità.

A tal' oggetto basta osservare che in questo fenomeno si hanno due lavori distinti, uno distrutto dalla resistenza elastica del trave per tutta la discesa del peso, l' altro prodotto dal peso stesso in quella discesa e che misura il primo poichè si ottiene l' equilibrio.

Dai principj del lavoro meccanico sappiamo che allorquando le resistenze variano proporzionalmente agli spazj che percorre la potenza nel distruggerle, il lavoro meccanico si ottiene misurando l' area di un triangolo rettangolo che ha per uno dei cateti lo spazio percorso dalla potenza nel tempo della sua azione, e per l' altro la resistenza alla fine del medesimo tempo. Nel caso attuale adunque se con f indichiamo l' abbassamento prodotto nel punto M, e con R la resistenza, sarà $\frac{1}{2} R . f$ il lavoro distrutto dal trave nel flettersi, e $\pi . f$ quello prodotto dal peso π nella sua discesa. Ma per le cose sopradette potendosi quest' ultimo prendere a misura di quello distrutto dalla resistenza, avremo:

$$\pi f = \tfrac{1}{2} R f \text{; e quindi; } \pi = \tfrac{1}{2} R$$

È facile esprimere in unità di peso la quantità R: poichè basta sospendere al punto M un grave capace di produrre l' abbassamento stabile f avvenuto per la discesa di π; e in tal caso l' equ. superiore diviene la traduzione algebrica del seguente Teorema:

Il peso che misura la forza elastica sviluppata sotto una certa flessione da un trave orizzontale e sostenuto ai suoi estremi, è doppio di quello che è capace di produrre la flessione medesima quando fosse semplicemente posato sul trave ed abbandonato a se stesso.

Indicando con P' il peso che attaccato al trave produce in esso la flessione corrispondente alla reazione elastica R, e con p il peso del trave sarà la resistenza R misurata da $P' + \alpha p$ essendo α un numero minore dell' unità e variabile secondo il rapporto delle distanze agli appoggi del punto di attacco dei pesi. Può in alcuni casi avvenire che sia trascurabile il peso del trave in confronto di P'; ma nelle nostre esperienze ove trattavasi di confermare l' enunciato teorema abbiamo dovuto tener conto anche del peso dei regoli adoperati, il quale non potea ritenersi trascurabile in confronto degli sforzi a cui sono stati sottoposti. E perciò abbiamo usato la formula

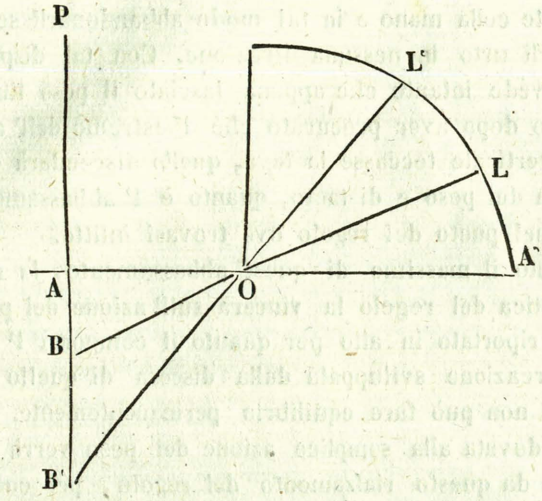
$$\pi = \tfrac{1}{2} \left(P' + \alpha p \right)$$

che dee verificarsi qualunque sia il punto M del regolo. Dalle formule che ci ha trasmesso Navier, e che nella citata nostra Memoria noi applicammo agli esperimenti allora istituiti, ricavasi $\alpha = {}^5/_8$ nel solo caso in cui i pesi P' sieno attaccati al mezzo dei regoli. Dupin che fece delle esperienze speciali (Journal de l'École Polytechnique) per determinarlo nel medesimo caso lo trovò eguale a ${}^{19}/_{30}$; e questo essendo il valore che più si avvicinava a quello da noi ottenuto è stato adottato nelle nostre ricerche in cui abbiamo sempre esaminato il solo punto di mezzo dei regoli.

Il modo da noi tenuto nel cercare la conferma del principio stabilito per via dell'esperienza è il seguente.

Due stabili appoggi murati consistenti in due soglie di pietra squadrate a filo sorreggevano orizzontalmente i regoli in esame. Al disotto di questi e ad una conveniente distanza era situato un altro regolo in posizion parallela a quella del primo, e ad una delle due faccie era applicato un quadrante verticale descritto con un raggio di 15 centimetri. Attorno ad un' asse orizzontale fisso nel centro di quel quadrante ruotava con leggerissimo attrito una verga parallelopipeda equilibrata, un' estremità della quale portava una lancetta per indicare il numero de' gradi contenuti negli angoli fatti dalla leva nelle sue diverse posizioni. Presso all' altra estremità, e ad una distanza determinata dal centro di rotazione la leva era in contatto con uno degli estremi di un grosso filo di rame che per l'altro trovavasi infisso a vite verticalmente nella faccia inferiore del regolo da sperimentarsi. Tutto era disposto in modo da permettere l'applicazione dei pesi che doveano produrre le flessioni, senza che l'apparecchio che ne dava la misura venisse turbato per la loro discesa. E questi poi non erano tanto grandi, come vedremo, da esigere uno speciale congegno per ritenere il regolo in posizione orizzontale prima di lasciarli liberi a se medesimi, giacchè poteasi con molta precisione sorreggerli inferiormente colla mano e in tal modo abbandonarli senza comunicarli urto in nessuna direzione. Con tal disposizione, si vede intanto che appena lasciato il peso libero a se stesso dopo aver procurato che l' estremo dell' asse rigido e verticale toccasse la leva, quello discenderà colla velocità del peso e di tanto, quanto è l' abbassamento prodotto nel punto del regolo ove trovasi infitto.

Raggiunto il massimo di quest' abbassamento, la reazione elastica del regolo la vincerà sull' azione del peso che sarà riportato in alto per quanto il comporta l' eccesso di reazione sviluppata dalla discesa di quello, e alla quale non può fare equilibrio permanentemente. La posizione dovuta alla semplice azione del peso verrà oltrepassata da questo rialzamento del regolo, per cui il peso nuovamente scenderà per riprodurre la primitiva flessione, ma non potrà raggiungerla e perchè cade da minore altezza, e perchè il regolo si trova animato da una forza che lo ha piegato in senso contrario e che deve esser distrutta. Vedesi intanto che attorno alla posizione d' equilibrio permanente fra il peso e il regolo si produrrà un certo numero di oscillazioni, la cui ampiezza andrà rapidamente diminuendo e saranno tutte minori di quella prodotta nella prima discesa del peso. Onde è che la leva, per essere come abbiamo detto, equilibrata rimarrà sempre nella posizione in cui l' ha portata il filo di rame nella prima discesa.



Sieno P il punto del regolo in esperimento, ove trovasi infitto il filo di rame $P\ B$; $B\ L$ e $B'\ L'$ le posizioni della leva prima e dopo l'esperienza, sarà $B\ B'$ l'abbassamento del punto P, che trattasi di determinare. Gli angoli $L\ O\ A' = \alpha$, $L'\ O\ A' = \alpha'$ e la distanza $O\ B = a$ prima dell' esperienza ed $O\ A' = r$ sono cogniti. I triangoli rettangoli $A\ O\ B$, $A\ O\ B'$ somministrano

$$A\ B' = \frac{A\ O \, . \operatorname{tang} \alpha'}{r} \; ; \; A\ B = \frac{A\ O \, . \operatorname{tang} \alpha}{r}$$

$$A\ O = a \, . \cos . \, \alpha$$

e perciò indicando con f l'abbassamento

$$B\ B' = A\ B' - A\ B$$

avremo: $$f = a \, . \frac{\operatorname{sen}\ (\alpha' - \alpha)}{\cos \alpha'}$$

Noi abbiamo sottoposti all' esperienza tre regoli soli di specie differente e delle medesime dimensioni, poichè essendo nota la legge colla quale varia la resistenza elastica al variare delle dimensioni dei regoli bastava trovare verificata la relazione superiore fra π ed R anche in un sol caso per dichiararla vera in tutti.

La prima ricerca è stata quella degli abbassamenti ottenuti per la discesa di pesi dati; la seconda quella dei pesi che fanno equilibrio a quegli abbassamenti. E quest' ultima è stata fatta nel modo seguente. Ad ogni esperimento corrispondente alla discesa di uno dei primi pesi, noi fissavamo la leva nella posizione che prendeva in virtù di esso, mediante una vite a pressione attorno al cui asse ruotava. Tolto poi quel peso si osservava se il regolo tornava alla sua primitiva posizione: il che ci veniva detto da un' indice orizzontale che si trovava a contatto colla faccia superiore del regolo prima dell' esperienza. In seguito si attaccava un peso un poco maggiore di quello adoprato e si andava mano a mano aumentando finchè l' estremo del filo di rame tornasse a toccare il braccio della leva. Quest' ultima esperienza faceasi nel più breve tempo possibile, e con tutte quelle avvertenze che sono necessarie onde il regolo non venisse a soffrire sotto un' azione troppo prolungata, o non ricevesse scosse che potessero alterare il valore del peso, il quale ci dava la misura del voluto abbassamento. La distanza fra gli appoggi è stata pei tre regoli adoperati di $1,^{m}\,935$. La loro lunghezza totale di $2,^{m}\,165$; la sezione quadrata per tutti, e con lato eguale a $0,^{m}\,020$: il braccio della leva su cui agiva l' asse verticale di rame e che abbiamo denominato a nella formula, eguale a 96 millimetri.

Regolo di Albero gattice pesante fra gli appoggi per $0^{k},322$.

Indicazione del quadrante	Abbassamento in millimetri	Valori in kilog. di π	P^{1}	$^{1}/_{2}(P^{1}+0,633\,p)$
$11^{0},50$	0,00	0,000	0,000	. . . .
$14^{0},75$	5,47	0,310	0,465	0,334
$11^{0},50$	0,00	0,000	0,000	. . . .
$18^{0},33$	11,62	0,620	1,000	0,633
$11^{0},50$	0,00	0,000	0,000	. . . .
$21^{0},75$	17,47	1,000	1,728	0,966
$31^{0},50$	33,50	2,000	3,772	1,988
$11^{0},50$	0,00	0,000	0,000	. . . .

Regolo di Abete pesante fra gli appoggi per $0^{k},325$

Indicazione del quadrante	Abbassamento in millimetri	Valori in kilog. di π	P^{1}	$^{1}/_{2}(P^{1}+0,633\,p)$
$8^{0},33$	0,00	0,000	0,000	. . . .
$11^{0},50$	5,28	0,310	0,460	0,333
$8^{0},33$	0,00	0,000	0,000	. . . .
$14^{0},50$	10,46	0,620	0,995	0,601
$17^{0},66$	15,74	1,000	1,782	0,994
$8^{0},33$	0,00	0,000	0,000	. . . .
$27^{0},25$	31,49	2,000	3,800	2,003
$8^{0},33$	0,00	0,000	0,000	. . . .

Regolo di Castagno pesante fra gli appoggi per 0k,353.

Indicazione del quadrante	Abbassamento in millimetri	Valori in kilog. di		
		π	$P^{\prime}$	$^1/_2(P^{\prime}+0,633\,p)$
13°,50	0,00	0,000	0,000	. . . .
19°,33	10,08	0,310	0,376	0,300
25°,00	19,68	0,620	1,026	0,625
13°,50	0,00	0,000	0,000	. . . .
30°,87	29,18	1,000	1,776	0,999
13°,50	0,00	0,000	0,000	. . . .
43°,50	49,344	2,000	3,776	2,000
13°,50	0,00	0,000	0,000	. . . .

Serve gettar gli occhi su queste tavole per scorgere quasi esatta corrispondenza tra i numeri della terza e della quinta colonna. Nè poteasi al certo ottenere dall'esperienze una conferma più luminosa della nostra formula

$$\pi = {}^1/_2\,(P^{\prime} + {}^{19}/_{30}\,p),$$

tanto più che il modo di farle non va esente da molte difficoltà. Ciò obbligavaci a ripeter più volte la ricerca dell'abbassamento prodotto dalla discesa di π e prendere la media delle indicazioni del quadrante, che non sono state mai differenti fra loro per più di 1°, corrispondente ad un abbassamento di 1 millimetro e mezzo circa.

Determinati pertanto con esattezza i pesi che misurano la resistenza dei travi sotto date flessioni, e noto il loro peso non farà più mestieri ricorrere all'esperimento per determinare quale sarebbe il grave che posato semplicemente sopra di essi li flette della medesima quantità. Nella soluzione del 2.° Problema che siam per dare, e nella quale sono di una grande importanza i valori di π, noi abbiamo avuto ricorso a questo metodo che è d'altronde semplicissimo, e può ritenersi esatto.

§. 2.

Azione di un grave che cadendo da una data altezza urta un trave orizzontale.

Un semplicissimo apparecchio somministrava i resultamenti delle esperienze dirette alla soluzione di questo Problema. Al di dietro del regolo in esame ne sorgeva un altro stabilmente fissato in direzione verticale. Lungo di esso già diviso in centimetri poteano scorrere un' asta di grosso filo di ottone terminata in punta, lunga otto decimetri circa, e mantenuta sempre orizzontale; inoltre una verga parimenti d'ottone e orizzontale lunga poco più di un decimetro. Sì l' una che l' altra era munita di un nonio, consistente in una piccola lastra metallica, che scorreva verticalmente insieme con ciascuna di esse lungo la scala accennata, e dava i decimi delle sue divisioni. Il zero della scala era al disopra del regolo in esperimento. Dal mezzo di questo pendeva un cordone di seta variabile di diametro secondo la grandezza dei pesi che alla sua estremità si attaccavano. Per togliere a questo cordone l' elasticità, di cui va eminentemente fornito quando è nuovo, sospendevasi per un capo a un punto fisso, e all' altro lasciavasi attaccato un grosso peso per due o tre giorni, e tale che allorquando se ne sgravava trovavasi il cordone reso quasi rigido, e privo quasi del tutto di sua elasticità. I pesi adoprati nel fare le esperienze erano tutti di piombo fusi in forma di cilindro. In grazia di un foro praticato lungo la loro linea di simmetria poteansi tutti infilare in un' asse che attaccavasi con un gancio ad una dell' estremità del cordone di seta nel suddetto modo preparato: l' altra estremità pendeva dal mezzo del regolo. Colla scala verticale situata al di dietro del regolo medesimo, avevasi la lunghezza del filo, tenendo fermo il regolo all' altezza che segnava sulla scala, allorchè era scarico, e portando il lato orizzontale della squadra scorrevole inferiore a contatto colla base superiore del cilindro pesante. Da questo punto si possono evidentemente contare le altezze dalle quali cadono i pesi: perchè riportando la squadra in alto a quell'altezza che ci piace, e sollevando il peso finchè la sua faccia superiore che è orizzontale sia a contatto col lato pure orizzontale della squadra, basterà abbandonarlo a se stesso, per ottenere quella caduta che può misurarci l'urto impresso al regolo in esame. L'effetto dell' urto o la flessione prodotta, ci era somministrata in centimetri e millimetri dall' asta orizzontale della squadra superiore che faceasi convenientemente scorrere finchè la faccia inferiore del regolo venendo a toccarla appena produceva nella sua estremità una leggerissima oscillazione. Essendo per ciò manifesto che molte volte abbiam dovuto ripetere una medesima esperienza prima di raggiungere quest' intento, e che raggiunto conveniva altre due o tre volte ripeterle per esserne sicuri, potrebbe nascer dubbio che il regolo non venisse facilmente ad alterarsi per i ripetuti urti, e quindi tali essere i resultati ottenuti da non potere con certezza stabilire per essi nessuna regola pratica. Per ovviare a simili dubbj che potrebbero sollevarsi nell'animo dei lettori, o di chi volesse trar partito da questa nostra fatica, non abbiamo tralasciato nessuna cautela. E primieramente noi misuravamo l'altezza da cui era caduto il peso computando non la lunghezza del filo prima di fare l'esperienze, ma dopo che le ripetute prove ci aveano assicurato d' avere ottenuta con tutta la possibile esattezza la misura della flessione. In seguito noi avevamo cura che appena seguito l' urto, il peso non agisse più sul regolo, ed abbiamo sempre riscontrato se togliendo il peso il regolo tornava alla sua posizione primitiva. E sia che i pesi adoprati fossero stati sempre molto lontani da quello che misura il limite della perfetta elasticità; sia che brevissimo fosse il tempo necessario alla produzione della flessione, per cui non potevamo mai distinguerlo, e piuttosto parea che contemporaneamente all' urto quella avvenisse, sia in fine per aver sempre rimosso il peso immediatamente dopo l' urto, noi abbiamo sempre ritrovato nulla l' alterazione che a prima vista sembra potere avvenire nei regoli per le ripetute scosse a cui tali esperienze li soggettavano. Ciò premesso, passiamo ad esporre le considerazioni che ci hanno guidato nella ricerca di una relazione fra i pesi, le altezze da cui sono caduti, e le flessioni prodotte in un regolo di dimensioni date, indipendentemente dai resultati sperimentali.

Egli è manifesto che se un peso cade da una data altezza sopra una verga rigida semplicemente sostenuta verso le sue estremità da due capi saldi, la quantità di cui questa verga si flette dipenderà non solo dalle sue dimensioni e dal grado di sua elasticità, ma dal deperdimento ancora che si fa della forza viva acquistata dal peso contro i sostegni. Nelle nostre esperienze: 1.° l' urto vien comunicato alla verga coll' intermezzo di un filo, il quale per quanto ci sembri doversi ritener trascurabile pure soffrirà un certo allungamento a scapito della forza viva acquistata: 2.° quest' urto comunicato al punto di mezzo del regolo deve in seguito trasmettersi ai sostegni a traverso a tutta la lunghezza del regolo stesso. Ciò accadrà e nell' atto dell' urto e forse anche per tutta la sua durata, ma la legge di questa trasmissione e l' effetto nocivo alla quantità d' azione prodotta nella discesa del grave ci sono incogniti. E se non fora opera perduta la ricerca analitica di queste due cause di deperdimento essa è per lo meno di così grande difficoltà a cagione dell' imperfetta omogeneità dei corpi in disamina da non riprometterne un vantaggio corrispondente. Il perchè lasciando al fatto solo la cura di somministrarci il loro effetto ci siam contentati di averlo così in complesso, sicuri di far cosa più utile alla pratica a cui più specialmente il presente lavoro è diretto.

Per raggiungere questo fine noi attaccheremo il problema dall' istante che segue immediatamente l' urto, e che è il primo del movimento comune al peso e al regolo. In quest' istante il punto di mezzo del regolo e il peso hanno evidentemente la sola velocità necessaria alla formazione della freccia: e ciò val quanto il supporre che non vi sia urto fra i due corpi, e che entrambi si muovano con una velocità acquistata. Potendosi in questa ipotesi trovar facilmente l' espressione del lavoro prodotto dal peso e dal regolo, quando sia nota la forza viva dei due corpi al principio della flessione o movimento comune, noi cominceremo dal determinare la forza viva da cui in quell' istante sarà animato non il solo punto di mezzo del regolo, ma tutti gli altri punti, i quali concorrono alla formazione della curva di cui vuolsi l' ordinata massima: e perciò crediamo sufficentemente esatta la ipotesi che le altezze a cui sono dovute le velocità di due punti qualunque del regolo siano proporzionali alle respettive loro distanze dagli appoggi. Siano pertanto:

a l' altezza a cui è dovuta la velocità del punto di mezzo del regolo immediatamente dopo l' urto

l la sua distanza da uno degli estremi fissi

a' l' altezza a cui è dovuta la velocità di un altro punto qualunque

x la sua distanza dal medesimo estremo

μ la sezione normale in questo punto

sarà $\mu\, d\, x$ la massa dell' elemento che si considera, e $2\, g\, a'\, \mu\, d\, x$ la sua forza viva. Ma per l' ipotesi emessa avendosi $a' = \frac{a\, x}{l}$, la forza viva del semiregolo sarà

$$\varphi = \frac{2\, g\, a}{l}\, \mu \int_0^l x\, d\, x = g\, \mu\, l\, a$$

Dinotando finalmente con m la massa dell' intero regolo, ed osservando che $\mu\, l = {}^1\!/_2\, m$, noi avremo la forza viva che anima tutti i punti del regolo alla formazione della curva presa per effetto dell' urto, espressa da $g m a$.

Ora la somma di questa forza viva con quella $2 g M a$ che si compete al peso urtante convertesi in un lavoro $a(g M + {}^1/_2\, g m)$, il quale unito anche all' altro fatto dal peso medesimo mentre continua a discendere per tutta la freccia misura quello distrutto dalla resistenza elastica sviluppata nel regolo. Ed ecco come mirabilmente cade in acconcio la soluzione del problema precedente. Là noi abbiamo imparato a misurare il lavoro della reazione elastica del regolo, ed abbiam trovato che indicando:

p il peso del regolo

P' quello che gli fa equilibrio allorchè è piegato al mezzo di una quantità f

il lavoro distrutto era dato da ${}^1/_2 f(P' + 0{,}633\, p)$. Laonde dinotando con P il peso urtante, sarà l' altezza incognita a determinabile coll' equazione.

$$(1) \; \ldots \; (P + {}^1/_2\, p)\, a + P f = {}^1/_2 f (P' + 0{,}633\, p).$$

Per i regoli prismatici, come sono stati tutti quelli da noi cimentati in quest' esperienza, e della cui sezione normale sieno b il lato orizzontale, c il verticale, sappiamo essere $P' = E' . G \dfrac{4\, b\, c^3 f}{(2l)^3}$, dove assumendo per unità di lunghezza il metro, e per unità di peso il chilogrammo la quantità E' è presso a poco eguale a 2000 pei legni da noi adoperati, e in generale per quelli usati nelle grandi costruzioni, e G la gravità specifica de' medesimi. (V. la Mem. cit.). Cosicchè il problema precedentemente risoluto ci offre l' anello di congiunzione fra la resistenza elastica alla flessione, e quella all' urto.

Per l' ipotesi ammessa i valori di a somministrati dalla equazione (1) dovranno essere, come lo sono di fatto, più piccoli di quelli che misurano l' altezza da cui cade il peso urtante. Onde valutare pertanto in qualche modo ciò che si perde nell' urto, e quindi tener conto dell' influenza dei sostegni, dell' allungamento del filo, e di ogni altra causa di deperdimento, noi ricorreremo al principio di Carnot conosciuto col nome di deperdimento delle forze vive nell' urto de' corpi molli e duri e che si esprime così: *la somma delle forze vive che hanno due corpi molli o duri prima d' urtarsi meno quella che rimane al sistema dopo l' urto, eguaglia la somma della forza viva che possederebbe ciascuno de' due corpi se si muovesse liberamente colla velocità che ha perduto od acquistato nell' urto*. Nel nostro caso uno de' corpi, l' urtato, è in quiete prima dell' urto; l' altro corpo, l' urtante, cade dall' altezza A ed ha acquistato all' istante che precede immediatamente l' urto una forza viva espressa da $2gMA$; nell' istante seguente la forza viva de' due corpi è come sopra abbiam detto $2(gM + {}^1/_2 gm)a$, onde pel surriferito principio, sarà: $2gMA - 2(gM + {}^1/_2 mg)a = M(\sqrt{2gA} - \sqrt{2ga})^2 + mga$ e introducendo i pesi invece delle masse

$$P(A-a) - pa = P(\sqrt{A} - \sqrt{a})^2$$

la quale colle opportune riduzioni diviene:

$$(2) \ldots a(P + {}^1/_2 p)^2 = AP^2$$

così le altezze calcolate a sarebbero proporzionali a quelle da cui sono effettivamente caduti i pesi.

Ora eliminando la a fra le equazioni (1), (2) troveremo per misura della freccia prodotta dall' urto di un corpo P che cade dall' altezza A sul mezzo di un trave orizzontale semplicemente sostenuto alle estremità

$$(3) \ldots f = \frac{A}{\left\{\frac{0{,}5\,P' + 0{,}316\,p}{P} - 1\right\}\left\{1 + 0{,}5\,\frac{p}{P}\right\}}$$

Che se rendessimo esplicite le dimensioni del regolo, e il grado di sua forza elastica, l' eliminazione superiore condurrebbe alla seguente equazione:

$$(4)\ldots\ 2\,E'.G.\frac{b\,c^3}{(2l)^3}f^2+(0,316\,p-P)f-\frac{A\,P^2}{P+{}^1/_2p}=0$$

la quale ci mostra essere una parabola la curva esprimente la legge che lega fra loro le altezze dovute alla velocità dei pesi urtanti e le frecce prodotte; e così il parametro di questa parabola sarà una funzione di quei medesimi pesi e del peso e dimensioni del regolo determinato dalle quantità:

$$\frac{P^2\,(2l)^3}{2\,E'.G\,b\,c^3\,(P+0,5\,p)}$$

Nei ragionamenti che precedono noi abbiam trascurato le porzioni del regolo che rimangono al di là degli appoggi. Nei casi ordinarj della pratica può forse ritenersi nulla la loro influenza sulla lunghezza compresa fra gli appoggi: ma potendo anche avvenire il contrario, siccome in molte delle nostre esperienze, così egli è utile calcolarla. Le nominate parti del regolo si sollevano, allorchè quella di mezzo fra gli appoggi si abbassa: questo sollevamento accade naturalmente a spese della forza viva accumulata nel peso, onde la forza viva acquistata dal regolo, sarà più propriamente quella sopra calcolata, diminuita dell' altra che è necessaria a produrre il sollevamento citato. Adottando la medesima ipotesi che ci ha condotto alla formola (3) egli è facile trovare che la forza viva in questione è data da $p\,a\,\frac{l'^2}{l^2}$ ove p, a, l hanno lo stesso significato che sopra, ed l' la lunghezza del regolo sporgente al di là degli appoggi, e quindi la formula (3) riducesi alla seguente:

$$(5) \ldots f = \frac{A}{\left\{\frac{0{,}5P' + 0{,}316p}{P} - 1\right\}\left\{1 + 0{,}5\frac{p}{P}\left(1 - \frac{l'^2}{l^2}\right)\right\}}$$

Il problema propostoci sarebbe ora risoluto se i valori sperimentali delle quantità poste nel 2^0 membro di questa equazione somministrassero per f il valore assunto nell' esperimento o dato da esso. Noi abbiamo fatto un gran numero di esperienze sopra regoli di qualità differente, e di diversa dimensione; ma la formula superiore non è stata mai verificata. Paragonando però fra di loro le differenze trovate fra i valori di f reali, e quelli somministrati dal 2^0 membro della (5) noi abbiamo potuto scorgere ch' esse aveano una dipendenza immediata dal rapporto esistente fra il peso urtante e il peso del regolo cimentato, non escluse d' altronde le altezze e le frecce prodotte. Dietro questa osservazione, noi abbiam cercato con una nuova serie di esperienze, di determinare la legge con cui quelle differenze variavano al variare dei detti elementi. E a tal' oggetto ci siamo provvisti di un regolo di albero gattice di buona costituzione, e di cui abbiamo fatto variare la lunghezza fra gli appoggi da 2 metri, a metri 1,2. È stato questo cimentato sotto sei lunghezze differenti, e per ciascuna di esse con sei diversi pesi. Onde completare poi la serie dei rapporti fra i due pesi del regolo e del corpo urtante, noi abbiamo avuto ricorso ad altri due regoli di differente qualità e dimensioni, e questi ci hanno somministrato anche il vantaggio di poter dedurre con certezza la legge cercata qualunque sia la grandezza e la qualità del legno in azione.

In tutte queste esperienze le frecce erano date, e si andavano cercando le altezze da cui doveano cadere i pesi per produrle. Abbiamo seguito questo metodo piuttosto che l' altro, di ricercare le frecce corrispondenti ad altezze date, sì perchè più diretto pel modo di verificare la formula (5), sì perchè molto più semplice e conducente a resultati più esatti.

Prendendo poi le frecce per ascisse, e le altezze ottenute con ciascun peso per ordinate, abbiamo costruito altrettante curve onde poter dedurre dalla loro regolarità, l'esattezza de' resultati sperimentali, e ripetere l' esperienze per quelli che a questa regolarità non corrispondessero. Noi però siamo felici di poter confessare che ben rare volte ci è avvenuto di dover ripetere un'esperienza, e che in altri casi in cui abbiamo avuto ricorso alla costruzione delle curve per simili correzioni, non si è riscontrato la regolarità che in questi abbiam trovata. Basti il dire che fra tutti i numeri esprimenti le altezze che sono consegnati nelle tavole seguenti i pochissimi corretti non differiscono da quelli somministrati dalle esperienze per una quantità maggiore di 3 millimetri.

(A)

Regolo di albero gattice lungo metri 2,000 *fra gli appoggi di sezione quadrata con lato* $=0^{m},015$.

Frecce in metri	Valori di A in metri pei pesi					
	$0^{k},093$	$0^{k},186$	$0^{k},279$	$0^{k},372$	$0^{k},465$	$0^{k},558$
0,005						
0,010	0,019					
0,015	0,0405	0,012				
0,020	0,0715	0,027	0,0135			
0,025	0,116	0,047	0,028	0,0075		
0,030	0,174	0,074	0,045	0,019		
0,035	0,245	0,105	0,070	0,033	0,015	
0,040	0,325	0,141	0,092	0,049	0,027	0,0135
0,045	0,417	0,185	0,123	0,071	0,0405	0,026
0,050	0,517	0,231	0,153	0,0945	0,056	0,040
0,055	0,630	0,286	0,1875	0,120	0,075	0,0555
0,060	. . . .	0,346	0,227	0,148	0,093	0,072
0,065	. . . .	. . . .	0,266	0,177	0,1155	0,088
0,070	. . . .	. . . .	. . . .	0,208	0,138	0,105
0,075	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	0,164	0,125
0,080	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	0,1905	0,146
0,085	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	0,170

(B)

Regolo di albero gattice lungo metri 1,750 *fra gli appoggi di sezione quadrata con lato* =0m,015.

Frecce in metri	Valori di A in metri pei pesi					
	0k,093	0k,186	0k,279	0k,372	0k,465	0k,558
0,005	0,009					
0,010	0,035	0,0135				
0,015	0,076	0,032	0,0165			
0,020	0,130	0,056	0,035	0,0165		
0,025	0,201	0,090	0,058	0,0355	0,019	
0,030	0,286	0,134	0,086	0,055	0,0355	0,020
0,035	0,390	0,187	0,125	0,079	0,0525	0,035
0,040	0,504	0,243	0,169	0,107	0,072	0,051
0,045	0,643	0,313	0,216	0,1415	0,095	0,069
0,050	0,803	0,3875	0,273	0,178	0,121	0,090
0,055	. . . .	0,479	0,334	0,217	0,150	0,112
0,060	. . . .	. . . .	0,401	0,2605	0,182	0,1385
0,065	. . . .	. . . .	. . . .	0,308	0,217	0,165
0,070	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	0,254	0,196
0,075	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	0,228

(C)

Regolo di albero gattice lungo metri 1,50 *fra gli appoggi di sezione quadrata con lato* =0m,015.

Frecce in metri	Valori di A in metri pei pesi					
	0k,093	0k,186	0k,279	0k,372	0k,465	0k,558
0,005	0,017					
0,010	0,067	0,029	0,0145			
0,015	0,130	0,063	0,0405	0,027	0,014	
0,020	0,216	0,107	0,073	0,053	0,0325	0,023
0,025	0,326	0,164	0,114	0,085	0,056	0,040
0,030	0,453	0,232	0,162	0,123	0,085	0,059
0,035	0,623	0,315	0,222	0,166	0,1195	0,0855
0,040	0,815	0,408	0,288	0,218	0,158	0,114
0,045	0,018	0,518	0,3675	0,277	0,200	0,147
0,050	0,246	1,639	0,462	0,345	0,251	0,187
0,055	. . . .	1,771	0,561	0,415	0,308	0,230
0,060	. . . .	. . . .	. . . .	0,492	0,368	0,280
0,065	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	0,332

(D)

Regolo di albero gattice lungo metri 1,40 *fra gli appoggi di sezione quadrata con lato* $=0^m,015$.

Frecce in metri	Valori di A in metri pei pesi					
	$0^k,093$	$0^k,186$	$0^k,279$	$0^k,372$	$0^k,465$	$0^k,558$
0,005	0,027	0,0085				
0,010	0,0813	0,040	0,0253	0,014		
0,015	0,156	0,084	0,058	0,038	0,025	0,016
0,020	0,264	0,142	0,101	0,074	0,044	0,0305
0,025	0,4045	0,213	0,156	0,117	0,074	0,0535
0,030	0,574	0,297	0,224	0,166	0,107	0,0815
0,035	0,776	0,408	0,302	0,228	0,152	0,115
0,040	1,006	0,534	0,3947	0,300	0,208	0,1565
0,045	1,284	0,674	0,499	0,384	0,270	0,202
0,050	. . . . .	0,835	0,613	0,477	0,343	0,262
0,055	. . . . .	. . . . .	0,737	0,591	0,423	0,327
0,060	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	0,516	0,397

(E)

Regolo di albero gattice lungo metri 1,30 *fra gli appoggi di sezione quadrata con lato* $=0^m,015$.

Frecce in metri	Valori di A in metri pei pesi					
	$0^k,093$	$0^k,186$	$0^k,279$	$0^k,372$	$0^k,465$	$0^k,558$
0,005	0,037	0,018				
0,010	0,108	0,059	0,036	0,022	0,010	
0,015	0,2185	0,114	0,0825	0,054	0,035	0,024
0,020	0,366	0,189	0,142	0,098	0,066	0,048
0,025	0,538	0,2865	0,215	0,156	0,108	0,080
0,030	0,7415	0,400	0,302	0,224	0,159	0,118
0,035	0,988	0,537	0,404	0,308	0,220	0,169
0,040	1,284	0,6955	0,523	0,404	0,295	0,229
0,045	. . . . .	0,885	0,647	0,508	0,378	0,294
0,050	. . . . .	1,090	0,795	0,6235	0,471	0,372
0,055	. . . . .	. . . . .	. . . . .	0,748	0,5855	0,4565
0,060	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	0,554

(F)

Regolo di albero gattice lungo metri 1,20 *fra gli appoggi di sezione quadrata con lato* = 0^{m},015.

Frecce in metri	Valori di A in metri pei pesi					
	0^{k},093	0^{k},186	0^{k},279	0^{k},372	0^{k},465	0^{k},558
0,005	0,055	0,025	0,0105			
0,010	0,155	0,079	0,0545	0,034	0,0215	0,0135
0,015	0,294	0,157	0,120	0,081	0,059	0,044
0,020	0,479	0,265	0,196	0,139	0,103	0,081
0,025	0,706	0,395	0,296	0,222	0,162	0,1255
0,030	1,000	0,548	0,421	0,319	0,241	0,181
0,035	. . . . .	0,742	0,573	0,433	0,331	0,248
0,040	. . . . .	0,985	0,749	0,578	0,4425	0,3318
0,045	. . . . .	. . . . .	0,944	0,730	0,5645	0,433
0,050	. . . . .	. . . . .	. . . . .	0,913	0,713	0,548

(G)

Regolo di castagno lungo metri 1,935 *fra gli appoggi di sezione quadrata con lato* = 0^{m},025.

Frecce in metri	Valori di A in metri pei pesi			
	0^{k},289	0^{k},514	0^{k},548	0^{k},576
0,005	0,010			
0,010	0,030	0,015	0,013	0,011
0,015	0,063	0,031	0,028	0,026
0,020	0,110	0,057	0,053	0,050
0,025	0,174	0,092	0,087	0,083
0,030	0,255	0,134	0,127	0,123
0,035	0,347	0,183	0,174	0,169
0,040	0,463	0,2425	0,229	0,221
0,045	0,604	0,307	0,293	0,282
0,050	0,777	0,385	0,366	0,347
0,055	. . . . .	0,476	0,448	0,425

(H)

Regolo di abete lungo metri 5,[illegible]15 *fra gli appoggi di sezione quadrata con lato* = $0^m,067$.

Frecce in metri	Valori di A in metri pei pesi							
	$2^k,33$	$3^k,83$	$5^k,33$	$6^k,83$	$8^k,33$	$9^k,83$	$11^k,33$	$12^k,83$
0,010	0,012							
0,020	0,055	0,019						
0,030	0,129	0,058	0,032	0,018				
0,040	0,248	0,123	0,061	0,042	0,030	0,021		
0,050	0,436	0,213	0,102	0,072	0,050	0,041	0,032	
0,060	0,707	0,332	0,160	0,114	0,080	0,068	0,0515	0,047
0,070	1,057	0,488	0,237	0,171	0,120	0,098	0,084	0,072
0,080	. . .	0,680	0,343	0,236	0,165	0,137	0,118	0,100
0,090	. . .	. . .	0,471	0,321	0,224	0,187	0,158	0,134
0,100	. . .	. . .	0,626	0,436	0,300	0,250	0,2065	0,178
0,110	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	0,261	0,224

In quest' ultimo regolo, che avea le dimensioni presso a poco degli ordinarj correnti usati nei coperti delle fabbriche, abbiamo creduto meglio far variare le frecce di centimetro in centimetro perchè i pesi urtanti erano molto grandi, ed esigendo un particolare congegno per sollevarli alle altezze convenienti, potevano i resultati esser meno esatti. Due colonne stabilmente fissate in posizione verticale erano con un grosso regolo, o catena orizzontale congiunte nelle loro estremità superiori. A questa catena erano fisse due carrucole, nelle cui gole passavano due cordicelle riunite per i loro capi inferiori da una spranga metallica che in posizione orizzontale manteneva i tratti delle funi verticali e paralleli fra loro. Per un foro praticato nel mezzo di essa passava il cordone di seta al quale era attaccato il peso urtante, e che in prossimità del punto di attacco portava una riparella capace di impedire lo scorrere della spranga lungo di esso allorquando tirando gli altri capi delle cordicelle rammentate veniva a sollevarsi. Così poteva esser tratto in alto con molta facilità il peso urtante; si attendeva ad ogni esperienza che tutto fosse in equilibrio, e in questo caso la spranga orizzontale, le due cordicelle e il cordone di seta formavano un piano verticale che passava per il punto di mezzo del regolo ed era a questo normale. Lasciando in seguito fuggirsi di mano le cordicelle, il peso cadeva per la verticale come pure la spranga delle cordicelle, senza pericolo che essa urtasse il peso nella sua caduta poichè rimaneva sospesa fra il punto d' attacco di quello al cordone, e la riparella citata. Seguito l' urto veniva il peso impedito dall' agire permanentemente sul regolo e produrvi la benchè minima alterazione, sollevandolo immediatamente colla spranga metallica. La forma dei pesi urtanti era quella altrove citata, e il medesimo apparecchio somministrava le altezze, e le frecce.

Dovendo coi valori, nelle precedenti Tavole consegnati, verificare la formula (5), o calcolarne almeno il 2.º membro, era necessario conoscere i valori dei pesi che misurano la resistenza di ciaschedun regolo sotto le frecce ottenute, e che abbiamo indicati in quelle formule con la lettera P'. Osservando che le massime flessioni prodotte in ciascun regolo sono minori di quelle che possono lasciare un' alterazione permanente, noi abbiamo ritenuto che la legge di proporzionalità si verifichi per tutte, e come esse crescono in ragione aritmetica, abbiamo cercato di determinare con sufficente numero di dati le medie del peso corrispondente alla flessione che è differenza costante della serie adottata. Pei primi sei regoli tratti tutti dal medesimo pezzo, e solo nella lunghezza diversi, abbiamo veduto che le medie citate rispondono alla legge di proporzionalità che fra loro deve esistere. Per quello di castagno, e di abete abbiamo dedotta la media dalla conoscenza dei pesi che faceano equilibrio al maggior numero delle frecce osservate. Il peso poi del regolo l'abbiamo determinato col metodo delle doppie pesate, adoperando sempre pesi usati nell'esperienze.

Del fattore $\left(1-\frac{l'^2}{l^2}\right)$ noi abbiamo tenuto conto in tutti i regoli tranne l'ultimo, giacchè in quelli la parte sporgente al di là degli appoggi era di $0^{m}340$ in lunghezza pei primi sei, e pel settimo di $0,^{m}240$. In quello di abete era eguale a due decimetri e potea evidentemente trascurarsi.

Provvisti in tal modo di tutti i dati necessarj al calcolo del secondo membro della formula (5), abbiamo chiamato ε le differenze fra i valori di quello, e i reali valori di f, ponendo:

$$(6)\quad \varepsilon=f-\frac{A}{\left\{\frac{0,5P'+0,316p}{P}-1\right\}\left\{1+0,5\frac{p}{P}\left(1-\frac{l'^2}{l^2}\right)\right\}}$$

e queste differenze le poniamo nelle seguenti tavole, a piè delle quali saranno scritti sotto a ciascheduna colonna dei valori di ε il valore del rapporto $\frac{P}{p}$ fra il peso urtante e quello del regolo urtato.

Regolo (A) pesante fra gli appoggi 0k,204,
per cinque millimetri di freccia la media è P'=0k,075.

Frecce in metri	Valori di ε pei pesi					
	0k,093	0k,186	0k,279	0k,372	0k,465	0k,558
0,005						
0,010	+0,0030					
0,015	+0,0058	+0,0010				
0,020	+0,0083	+0,0017	—0,0126			
0,025	+0,0101	+0,0022	—0,0111	—0,0078		
0,030	+0,0116	+0,0028	—0,0095	—0,0092		
0,035	+0,0129	+0,0036	—0,0115	—0,0096	—0,0111	
0,040	+0,0146	+0,0044	—0,0093	—0,0092	—0,0120	—0,0202
0,045	+0,0160	+0,0047	—0,0101	—0,0117	—0,0117	—0,0228
0,050	+0,0179	+0,0056	—0,0090	—0,0126	—0,0114	—0,0238
0,055	+0,0192	+0,0059	—0,0082	—0,0129	—0,0126	—0,0243
0,060	. . . . .	+0,0063	—0,0083	—0,0133	—0,0112	—0,0240
0,065	. . . . .	. . . . .	—0,0072	—0,0127	—0,0119	—0,0215
0,070	. . . . .	. . . . .	. . . . .	—0,0121	—0,0114	—0,0200
0,075	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	—0,0116	—0,0200
0,080	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	—0,0112	—0,0192
0,085	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	—0,0253
$\frac{P}{p}=$	0,4559	0,9117	1,3676	1,8235	2,2789	2,7352

Regolo (B) pesante fra gli appoggi 0k,1785,
per cinque millimetri di freccia la media è P=0k,111.

Frecce in metri	Valori di ε pei pesi					
	0k,093	0k,186	0k,279	0k,372	0k,465	0k,558
0,005	—0,0008					
0,010	+0,0009	—0,0127				
0,015	+0,0027	—0,0056	—0,0158			
0,020	+0,0047	—0,0025	—0,0136	—0,0187		
0,025	+0,0064	—0,0018	—0,0121	—0,0197	—0,0266	
0,030	+0,0082	—0,0016	—0,0112	—0,0173	—0,0241	—0,0288
0,035	+0,0097	—0,0015	—0,0129	—0,0166	—0,0209	—0,0265
0,040	+0,0113	—0,0005	—0,0139	—0,0164	—0,0188	—0,0238
0,045	+0,0130	—0,0005	—0,0142	—0,0174	—0,0179	—0,0220
0,050	+0,0142	—0,0003	—0,0153	—0,0175	—0,0176	—0,0215
0,055	. . . . .	—0,0006	—0,0161	—0,0172	—0,0173	—0,0201
0,060	. . . . .	. . . . .	0,0167	—0,0181	—0,0171	—0,0205
0,065	. . . . .	. . . . .	. . . . .	—0,0173	—0,0171	—0,0200
0,070	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	—0,0168	—0,0199
0,075	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	—0,0196
$\frac{P}{p}=$	0,5211	1,0427	1,5649	2,0833	2,6042	3,1348

Regolo (C) pesante fra gli appoggi 0k,153, per cinque millimetri di freccia la media è P'=0k,176.

Frecce in metri	Valori di ε pei pesi					
	0k 093	0k,186	0k,279	0k,372	0k,465	0k,558
0,005	—0,0018					
0,010	—0,0015	—0,0082	—0,0163			
0,015	+0,0008	—0,0067	—0,0153	—0,0264	—0,0350	
0,020	+0,0035	—0,0054	—0,0143	—0,0236	—0,0257	—0,0387
0,025	+0,0044	—0,0048	—0,0141	—0,0225	—0,0230	—0,0285
0,030	+0,0063	—0,0041	—0,0137	—0,0225	—0,0235	—0,0235
0,035	+0,0073	—0,0038	—0,0143	—0,0221	—0,0242	—0,0236
0,040	+0,0084	—0,0033	—0,0144	—0,0226	—0,0243	—0,0228
0,045	+0,0100	—0,0032	—0,0154	—0,0236	—0,0242	—0,0228
0,050	+0,0117	—0,0031	—0,0172	—0,0250	—0,0252	—0,0240
0,055	. . . . . .	—0,0028	—0,0182	—0,0254	—0,0268	—0,0248
0,060	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	—0,0270	—0,0260
0,065	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	—0,0274
$\frac{P}{p}=$	0,6078	1,2165	1,8248	2,4331	3,0303	3,6500

Regolo (D) pesante fra gli appoggi 0k,1428, per cinque millimetri di freccia la media è P'=0k,2175

Frecce in metri	Valori di ε pei pesi					
	0k,093	0k,186	0k,279	0k,372	0k,465	0k,558
0,005	—0,0035	—0,0101				
0,010	—0,0012	—0,0084	—0,0182	—0,0307		
0,015	+0,0013	—0.0072	—0,0160	—0,0216	—0,0286	—0,0421
0,020	+0,0029	—0,0064	—0,0155	—0,0228	—0,0196	—0,0224
0,025	+0,0043	—0,0055	—0,0158	—0,0232	—0,0199	—0,0212
0,030	+0,0053	—0,0046	—0,0167	—0,0232	—0,0189	—0,0211
0,035	+0,0069	—0,0050	—0,0219	—0,0243	—0,0208	—0,0215
0,040	+0,0083	—0,0052	—0,0186	—0,0267	—0,0237	—0,0233
0,045	+0,0092	—0,0053	—0,0197	—0,0288	—0,0260	—0,0244
0,050	. . . . . .	—0,0056	—0,0206	—0,0309	—0,0291	—0,0282
0,055	. . . . . .	. . . . . .	—0,0213	—0,0347	—0,0318	—0,0313
0,060	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	—0,0353	—0,0339
$\frac{P}{p}=$	0,6514	0,7216	1,9569	2,6109	3,2573	3,9063

Regolo (E) pesante fra gli appoggi $0^k,1326$ per cinque millimetri di freccia la media è $P'=0^k,272$.

Frecce in metri	Valori di ε pei pesi					
	0k,093	0k,186	0k,277	0k,372	0k,465	0k,558
0,005	—0,0042	—0,0145				
0,010	—0,0020	—0,0104	—0,0158	—0,0227	—0,0238	
0,015	—0,0007	—0,0085	—0,0173	—0,0203	—0,0214	—0,0252
0,020	+0,0006	—0,0077	—0,0179	—0,0210	—0,0205	—0,0220
0,025	+0,0024	—0,0076	—0,0184	—0,0231	—0,0221	—0,0225
0,030	+0,0042	—0,0072	—0,0191	—0,0246	—0,0237	—0,0229
0,035	+0,0057	—0,0072	—0,0199	—0,0271	—0,0257	—0,0260
0,040	+0,0068	—0,0073	—0,0212	—0,0294	—0,0287	—0,0291
0,045	. . . . .	—0,0081	—0,0214	—0,0311	—0,0313	—0,0312
0,050	. . . . .	—0,0085	—0,0227	—0,0328	—0,0338	—0,0345
0,055	. . . . .	. . . . .	. . . . .	—0,0342	—0,0381	—0,0373
0,060	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	—0,0410
$\frac{P}{p}=$	0,7012	1,4045	2,1052	2,8090	3,5088	4,2194

Regolo (F) pesante fra gli appoggi $0^k,1224$, per cinque millimetri di freccia la media è $P'=0^k,347$.

Frecce in metri	Valori di ε pei pesi					
	0k,093	0k,186	0k,279	0k,372	0k,465	0k,558
0,005	—0,0057	—0,0127	—0,0178			
0,010	—0,0038	—0,0107	—0,0177	—0,0203	—0,0233	—0,0263
0,015	—0,0019	—0,0098	—0,0184	—0,0218	—0,0247	—0,0276
0,020	—0,0004	—0,0102	—0,0193	—0,0224	—0,0242	—0,0271
0,025	+0,0011	—0,0102	—0,0206	—0,0257	—0,0261	—0,0271
0,030	+0,0092	—0,0100	—0,0227	—0,0250	—0,0301	—0,0285
0,035	. . . . .	—0,0110	—0,0253	—0,0314	—0,0333	—0,0308
0,040	. . . . .	—0,0130	—0,0290	—0,0361	—0,0378	—0,0342
0,045	. . . . .	. . . . .	—0,0304	—0,0391	—0,0414	—0,0390
0,050	. . . . .	. . . . .	. . . . .	—0,0436	—0,0468	—0,0439
$\frac{P}{p}=$	0,7599	1,5174	2,2779	3,0395	3,8023	4,5662

Regolo (G) pesante fra gli appoggi $0^k,576$, per cinque millimetri di freccia la media è $P'=0^k,342$.

Frecce in metri	Valori di ε pei pesi			
	0k,289	0k,514	0k,548	0k,576
0,005	—0,0012			
0,010	+0,0022	—0,0032	—0,0048	—0,0047
0,015	0,0041	—0,0016	—0,0024	—0,0031
0,020	0,0073	+0,0018	+0,0009	+0,0002
0,025	0,0092	0,0029	0,0017	0,0007
0,030	0,0110	0,0042	0,0028	0,0014
0,035	0,0130	0,0057	0,0041	0,0024
0,040	0,0141	0,0066	0,0052	0,0036
0,045	0,0155	0,0081	0,0061	0,0044
0,050	0,0159	0,0088	0,0068	0,0058
0,055	. . . .	0,0092	0,0060	0,0064
$\frac{P}{p}=$	0,5000	0,8926	0,9514	1,0000

Regolo (H) pesante fra gli appoggi $15^k,565$ per dieci millimetri di freccia la media è $P'=2^k,5$.

Frecce in metri	Valori di ε pei pesi							
	2k,33	3k.83	5k,33	6k,83	8k,33	9k,83	11k,33	12k,83
0,010	+0,0088							
0,020	0,0161	+0,0160						
0,030	0,0231	0,0215	+0,0202	+0,0196				
0,040	0,0294	0,0259	0,0262	0,0233	+0,0203	+0,0172		
0,050	0,0344	0,0302	0,0319	0,0282	0,0262	0,0202	+0,0144	
0,060	0,0384	0,0340	0,0361	0,0322	0,0302	0,0228	0,0188	+0,0066
0,070	0,0417	0,0369	0,0398	0,0350	0,0332	0,0271	0,0189	0,0098
0,080	. . . . .	0,0393	0,0419	0,0382	0,0312	0,0300	0,0215	0,0136
0,090	. . . . .	. . . . .	0,0437	0,0401	0,0388	0,0315	0,0238	0,0211
0,100	. . . . .	. . . . .	0,0448	0,0396	0,0400	0,0316	0,0251	0,0166
0,110	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	0,0267	0,0184
$\frac{P}{p}=$	0,1497	0,2461	0,3424	0,4504	0,5354	0,6317	0,7283	0,8244

Dalle premesse Tavole risultano non essere indifferenti i valori di ε, che in alcuni casi sorpassano anche la metà della freccia. Essi sono *positivi* e *negativi* secondo il rapporto $\frac{P}{p}$ e la freccia prodotta dal peso urtante P. Basta tener dietro ai valori di ε corrispondenti ai valori crescenti di $\frac{P}{p}$ per dedurre:

1.ª Che sono *positivi* in generale allorquando $\frac{P}{p} < 1$ e per tutte le frecce il cui rapporto con $\frac{P}{p}$ è maggiore di 0,01 : 1. In questo caso è uopo ammettere che la porzione di forza viva acquistata dal peso P nella discesa, e comunicata al regolo è stata capace di farlo flettere più di quello che vien dato dal nostro ragionamento teorico. Ora in questo abbiamo ritenuto che le velocità dopo l'urto nel corpo urtante e in quello urtato sieno eguali, lo che porta a riguardarli come corpi molli: che se li avessimo considerati come elastici forse nel risalto del peso P si troverebbe quell' accrescimento di forza comunicata che mostra l'esperienza. E probabilmente verrebbe la freccia anche più piccola di quella data dall'esperienza, il qual fenomeno ridotto allora generale ben si comprenderebbe per le forze che si perdono nei sostegni, nella cedevolezza delle corde ec.

2.ª Vanno poi i medesimi valori diminuendo per una stessa freccia al crescere del rapporto $\frac{P}{p}$.

3.ª A misura che $\frac{P}{p}$ si avvicina all' unità, i valori positivi di ε sono vicinissimi allo zero, ed allorchè $\frac{P}{p} > 1$ divengono essi tutti negativi. In tal caso mentre continuano ad esser piccolissimi finchè $\frac{P}{p}$ è poco differente dall' unità, vanno negativamente crescendo a misura che il rapporto se ne discosta; talchè obbediscono alla legge 2.ª

4.ª Per un medesimo valore di $\frac{P}{p} < 1$ i valori positivi di ε vanno crescendo al crescere delle frecce, le loro differenze prime diminuiscono.

5.ª Per un medesimo valore di $\frac{P}{p} > 1$ i valori negativi di ε decrescono rapidamente al crescere delle frecce, ossia obbediscono alla legge precedente; e in seguito si conservano costanti o pochissimo differenti fra loro. Ciò rendesi più sensibile mano a mano che i valori di $\frac{P}{p} > 1$ si allontanano dall' unità: poichè fino a $\frac{P}{p} = 2{,}5$ per frecce che crescono da $0{,}^{m}005$ a $0{,}^{m}080$ ha luogo la legge 4.ª

6.ª Quando $\frac{P}{p} = 1$ i valori di ε obbediscono alle leggi 1.ª 2.ª 3.ª: cioè per le piccole frecce sono negativi, poi si rendono positivi e trascurabili non cessando però di obbedire alla 4.ª legge. Per $\frac{P}{p} = 1{,}043$ si trovano tutti negativi e piccolissimi, obbedienti sempre alle leggi superiori.

Laonde possiamo concludere che se esistono dei casi, in cui la formula (5) è sufficientemente esatta nella pratica, ciò avviene allorquando si può ritenere il peso urtante pochissimo maggiore, o minore di quello del trave urtato.

Pongasi dunque:

$$(7) \ldots \varepsilon = nf\left(1 - \frac{P}{p}\right) + m\frac{P}{p}\sqrt{A} + q$$

dove m, n, q sieno quantità costanti da determinarsi coll' esperienza.

Questo valore può evidentemente sodisfare alla 1.ª, 2.ª e 3.ª delle leggi rammentate.

La 4.ª e 5.ª legge sono pure in tutte le loro parti sodisfatte poichè denominando con ε, ε', ε'' tre valori consecutivi di ε corrispondenti allo stesso rapporto $\frac{P}{p}$, e a tre frecce consecutive f, f', f'' noi troviamo colle nostre esperienze la quantità $2\sqrt{A'} - \sqrt{A''} - \sqrt{A} > 0$ per $\frac{P}{p} < 1$, e trascurabile per $\frac{P}{p} > 1$

Per $A = 0$ la freccia dovendo esser proporzionale al peso P che l' ha prodotta, e non eguale a zero siccome la formula (5) somministrerebbe, dovrà a questo supplire la correzione ε la quale diviene:

$$\varepsilon = nf\left(1 - \frac{P}{p}\right) + q$$

Ma non basta che sieno in generale sodisfatte le leggi a cui van soggette le variazioni di ε: è necessario ancora che l' esperienza somministri i valori di m, n, q costanti in ogni caso. Con tre serie di esperienze noi possiamo giungere alla determinazione esatta di questi tre valori. Infatti:

1.° *Cercando le frecce prodotte nel caso che i rapporti* $\frac{P}{p}$ *sieno eguali, ed eguali pure le altezze da cui cadono i pesi P, per regoli di egual qualità, o di qualità differente*, si dovrà trovare:

$$\varepsilon' - \varepsilon = n\left(1 - \frac{P}{p}\right)(f' - f) \quad . \quad . \quad . \; (a).$$

2.° *Cercando le altezze corrispondenti a rapporti eguali* $\frac{P}{p}$, *e a frecce eguali per regoli di egual qualità, o di qualità differente*, dovrà éssere:

$$\varepsilon' - \varepsilon = m\,\frac{P}{p}\,(\sqrt{A'} - \sqrt{A}) \quad . \quad . \quad . \quad . \; (b).$$

Conosciuti m, ed n la eq. (7) determinerebbe il valore di q; e questo si potrebbe avere da una media generale presa fra i valori che somministrerebbero tutti i resultati registrati nelle tavole precedenti. Ma stante che il valore di q si vede dover essere assai piccolo, e quindi pochissimo influire sulla soluzione approssimata del nostro problema, noi l'abbiamo determinata applicando la formula (7) ai resultati offertici dalla seguente ricerca;

3.° *Trovare i rapporti* $\frac{P}{p}$ *corrispondenti a frecce eguali e ad eguali altezze per dei regoli della medesima qualità o di qualità differente.* In tal caso i valori di ε ricavati dalla (6) e sostituiti nella (7) dovran somministrare per q dei valori costanti. Ognuna delle tre equ. (a), (b), (7), è capace adunque di determinare una delle tre costanti m, n, q. Osserviamo però che le equ. (a), e (b) non esprimono nuove leggi, a cui debbano andar soggetti i valori di ε, ma sono espressioni diverse di quelle sopra citate e che hanno forniti i criterj per la formazione della formula empirica (7).

Con sei regoli che denomineremo (M), (N), (P), (M'), (N'), (P') abbiamo verificato le tre eq. superiori, e determinate in seguito m, n, q. I primi tre della medesima sezione quadrata avente per lato $0^m,025$; ed essendo

(M) un regolo di abete pesante fra gli appoggi $0^k,538$
(N) un regolo di gattice pesante fra gli appoggi $0^k,517$
(P) un regolo di castagno pesante fra gli appoggi $0^k,576$.

I secondi tre non sono altro che i precedenti a cui è stato soltanto variato il lato della sezione e ridotto a $0^m,020$, per cui:

il regolo di abete (M') pesa fra gli appoggi. . $0^k,331$
quello di gattice (N') . . . . $0^k,311$
quello di castagno (P') . . . . $0^k,355$.

La lunghezza in tutti è stata ritenuta la medesima, cioè di $2^m,175$ e fra gli appoggi di metri 1,935.

I resultamenti ottenuti in queste tre ricerche sono registrati nelle seguenti tavole.

Prima ricerca.

Rapporti $\frac{P}{p}$	Altezze	Frecce ottenute dai regoli (M)	(N)	(M')	(N')	(P')
1,68	0,100	0,025	0,0238	0,0335	0,034	0,040
0,56	0,250	0,024	0,0237	0,0265	0,0287	0,034
0,28	0,600	0,0228	0,0233	0,0263	0,0266	0,0405

Seconda ricerca.

Rapporti $\frac{P}{p}$	Frecce	Altezze da cui sono caduti i pesi P sui regoli (M)	(N)	(M')	(N')	(P')
1,68	0,045	0,390	0,400	0,245	0,225	0,139
0,56	0,030	0,446	0,433	0,303	0,284	0,160
0,28	0,020	0,474	0,472	0,338	0,316	0,199

$$f=\frac{A}{\left\{\frac{0{,}5P'+0{,}316p}{P}-1\right\}\left\{1+0{,}5\frac{p}{P}\left(1-\frac{l'^2}{l^2}\right)\right\}}$$

per risolvere il Problema allorquando il peso p del trave è presso a poco eguale al peso P del corpo che può urtarlo al mezzo. Onde renderla poi di uso generale per gli altri valori del peso cadente, e più esatta per quello stesso valore ora rammentato dovrà al secondo membro della medesima intendersi aggiunta la quantità

$$\varepsilon=1{,}564 f\left(\frac{P}{p}-1\right)-0{,}056\frac{P}{p}\sqrt{A}+0{,}0104$$

Il valore di P' da sostituirsi nell'equ. superiore è dato da

$$P'=E.\frac{4bc^3}{(2l)^3}f$$

e questo elevando la equ. medesima al 2.° grado, per evitare la complicanza del calcolo, sia che debba aggiungersi o nò il valore di ε al suo secondo membro, si potrà nella pratica determinare il valore di f trascurando il valore di P' e risolvendo l'equ. di primo grado che ne resulta rapporto a f. Avremo così un primo valore approssimato di f da sostituirsi nell'espressione di P' e con questo potremo ottenere un secondo valore di f più esatto, risolvendo sempre un'equ. del 1.° grado. Anche $\frac{l'^2}{l^2}$ riducendosi talvolta molto prossimo a zero potrà esser trascurato per semplificazione del calcolo.

É facile accorgersi che per $A=0$, o per valori piccolissimi di A, possono darsi dei casi in cui la formula nostra non sodisfi al Problema: ma questi casi non potendosi che raramente incontrare nella pratica, essa ne rappresenterà sempre una soluzione approssimata. D'altronde intendiamo che le formule da noi accennate per fissare la relazione tra le frecce, le altezze, i pesi urtanti ec. non stabiliscano un' esatta teoria, ma sieno utili per sodisfare ai bisogni della pratica, e possano dar lumi sperimentali ai Matematici onde estendere le teorie dell' urto.

§. 3.

Azione di un grave che scorre con velocità differenti sovra un trave orizzontale.

Il sistema dei ponti a travate orizzontali di legno o di ferro, come vediamo anche nella nostra Toscana adottato dai costruttori della Via ferrata Leopolda, ci fece nascere l' idea delle attuali ricerche sperimentali. L' immenso carico della locomotiva col treno che l' accompagna spinto con diverse velocità sul piano di questi ponti; il sensibile abbassamento prodotto su ciascuna guida in tutti i punti della strada, e verificantesi maggiore sul ponte, il quale costringendo le ruote a salire sulla guida seguente è causa di continui urti su tutto il sistema, ci sembrano fatti di non lieve interesse, e meritevoli di essere in qualche modo studiati. Parlavasi di alcune esperienze fatte sovra uno di questi ponti costruito sull' Era, mentre noi studiavamo l' azione del movimento di un carico sopra un trave orizzontale, ma se la notizia fosse vera, e quali resultati se ne ottenessero non ne è stato reso conto al pubblico. E molto interesserebbe di conoscerli perchè quei ponti offrono la più grandiosa applicazione della resistenza respettiva del ferro fuso complicata coll' effetto degli urti. Noi siamo ben lungi dal presumere che le nostre ricerche possano offrire i mezzi necessarj per stabilire la teoria sulla stabilità di tali costruzioni: ma mentre presentano un saggio di ciò che dovrebbe farsi su questo soggetto, stabiliscono anche certe leggi generali tuttora incognite alla Scienza, e meritevoli di ulteriori e più sottili disamine. Esse ci daranno ancora la misura di certi effetti nocivi prodotti da cause non ignote, ma non credute capaci di tanto. Faranno insomma sentire l' imponente necessità di studiare questi effetti là dove le dimensioni e i pesi sono al suo vero valore, e dove dee garantirsi la pubblica sicurezza.

Le presenti esperienze sono state fatte sovra un grosso corrente di abete lungo metri 5,975 di sezione rettangolare, il cui lato verticale è $0^m,0535$, e quello orizzontale di $0^m,114$. Era posato orizzontalmente sovra due stabili appoggi murati per un decimetro solo all' una e all' altra estremità. A queste erano attestati con semplice contatto altri due pezzi fissi lunghi metri 2, le cui facce superiori della medesima larghezza di quel nostro trave costituivano con essa un medesimo piano. Coll' addizione di tali pezzi poteasi ottenere più uniforme la velocità del carico sul trave in esame, come vedrassi in seguito. Un cilindro di abete a base di metri 0,107 di diametro e di una lunghezza $0^m,200$ era destinato al movimento del carico. Alle sue estremità era munito di due bordi circolari alti $0^m,013$, che nella corsa del cilindro impedivano la sua facile uscita fuora del piano del trave. Due perni lunghi $0^m,025$ di un diametro di $0^m,010$ erano infitti nel centro di ciascuna base del cilindro, e formavano il prolungamento del suo asse. In ognuno di essi erano incavati due solchi circolari. Uno di questi dovea ritenere il peso che essendo attaccato ad una verghetta d' ottone potea ruotare entro di quello mediante un foro praticato nell' altra estremità della verghetta; un peso eguale si attaccava egualmente all' altro perno. Negli altri due solchi che erano per ciascuno dei due perni si introducevano i lati longitudinali di una doppia staffa di ottone avente la forma di un rettangolo. I perni e il cilindro ruotavano entro i fori praticati al mezzo di questi lati, mentre la staffa si avanzava semplicemente con moto progressivo tirata lungo il nostro trave da una cordicella di seta. In tal modo comunicandosi alla corda la velocità che più piaceva si traeva la staffa, e rotolava il cilindro sul trave standovi aggravato col peso che portava ai suoi perni. Affinchè la corda fosse tirata precisamente nella direzione media del piano del nostro trave conveniva non solo farla avvolgere ad una ruota, ma anche tenerla in guida con delle puleggie: essa, preparata siccome quella che adopravasi poi nell' urto, avea uno dei suoi capi fisso al mezzo di uno dei lati trasversali della staffa, e passando sopra la gola di una puleggia situata alla estremità più lontana di uno dei pezzi aggiunti al trave in esame, e costituenti con esso una medesima intravatura, prolungavasi un poco per avvolgersi sulla circonferenza scanalata di una ruota avente $0^m,950$ di diametro, e quindi passando per la gola di due pulegge situate al disopra del trave si avvolgeva ad una quarta puleggia fissa nell' estremità dell' altro pezzo aggiunto per attaccarsi coll' altro capo al punto di mezzo del secondo lato trasversale della staffa. Il tratto della corda più prossimo al trave conservavasi parallelo al trave medesimo, e resultava tangente alla ruota nell' estremità del suo diametro verticale. La circonferenza della ruota, e il perimetro della corda, che in tal modo disposta facea l' ufficio di una corda senza fine trovavansi nel medesimo piano verticale che passava per l' asse del trave, e su cui trovavasi anche il centro di gravità del carico. La ruota era di legno, grossa $0^m,035$ fissa in un' asse orizzontale di ferro sostenuto da due stabili piedritti e girevole colle sue estremità in due fori praticati in dadi dello stesso metallo. Un manubrio lungo $0^m,250$ comunicava il conveniente muovimento alla ruota e al carico. L' apparecchio da noi adottato permetteva al carico di avanzarsi con sufficente uniformità di moto su tutta la lunghezza del trave qualunque fosse la velocità. Poichè il pezzo aggiunto, che dovea esser percorso prima che il carico si trovasse sul trave, serviva a fare acquistare e alla ruota e al carico la velocità conveniente al conservamento della uniformità, e l'altro pezzo aggiunto era utilissimo per togliere il moto allorquando la corsa era avvenuta sul trave. La disposizione data alla corda di trazione impediva che il moto si accelerasse nel carico, allorchè percorreva la prima metà del suo cammino. Con un contatore alla mano poteasi con molta esattezza avere la misura del tempo impiegato nel percorrere il solo trave in esperimento. Un apparecchio simile a quello adottato per avere la misura degli abbassamenti nell'esperienze dirette alla soluzione del 1.° Problema, ci ha servito in queste a darci gli abbassamenti massimi del trave avvenuti nel tempo della corsa del carico. Se non che qui esistendo evidentemente un' influenza immediata fra l' abbassamento che avviene in un punto e quelli che sono nei punti precedenti avvenuti, importava che noi tenessimo conto ad un tempo di più di uno di essi. Abbiamo perciò fatto uso in queste esperienze di cinque quadranti fissati tutti in un medesimo piano alla faccia verticale di un regolo parallelo al trave e situato al di sotto di esso. Gli abbassamenti misurati da questi quadranti corrispondevano a punti distanti da uno degli appoggi di $1^m,155$; $2^m,021$; $2^m,887$; $3^m,753$; $4^m,619$. In tal modo essendo i due estremi a destra egualmente distanti dal mezzo di quelli a sinistra, noi potevamo investigare l' azione del peso in moto su i diversi punti del trave in confronto con quella di una semplice pressione. Indicando con (A) il punto di mezzo, e denominati (B), (C) i due punti a sinistra; (B'), (C') quelli a destra che erano anche i primi a risentire l'azione del peso in moto, la loro posizione sul trave, e le loro reciproche distanze sono le seguenti:

$1^m,155 ... C ... 0^m,866 ... B ... 0^m,866 ... A ... 0^m,866 ...$
$B' ... 0^m,866 ... C' ... 1^m,155$

cioè ciascuno dei punti (C), (C') trovasi distante dal punto d' appoggio per 1^m,155, e gli altri punti esplorati avevano fra di loro la distanza 0^m,866. Alcuni dei resultati ottenuti dalle nostre esperienze sono registrati nella tavola che segue, ove i numeri scritti nella colonna dei pesi comprendono non solo quelli attaccati alla estremità dell' asse del cilindro, ma anche il peso del cilindro medesimo; e quei della colonna delle velocità esprimono il rapporto fra la lunghezza del trave da un' appoggio all' altro dato in metri e il tempo impiegato dal carico a percorrerlo contato in minuti secondi, cioè lo spazio medio percorso dal nostro grave in 1."

Peso in moto	Abbassamento dei punti					Velocità
	(C)	(B)	(A)	(B')	(C')	
	m	m	m	m	m	m
3^k,109	0,0035	0,0056	0,0062	0,0056	0,0037	0,4125
	0,0035	0,0056	0,0066	0,0058	0,0039	0,5250
	0,0039	0,0059	0,0071	0,0063	0,0042	3,8500
	0,0066	0,0103	0,0118	0,0106	0,0070	8,6194
7^k,109	0,0083	0,0131	0,0149	0,0142	0,0096	0,4125
	0,0080	0,0131	0,0149	0,0142	0,0096	1,2833
	0,0112	0,0178	0,0197	0,0185	0,0126	2,8875
	0,0181	0,0290	0,0386	0,0296	0,0206	8,6194
11^k,765	0,0139	0,0231	0,0266	0,0245	0,0169	0,2406
	0,0140	0,0232	0,0266	0,0245	0,0170	0,4225
	0,0143	0,0235	0,0269	0,0250	0,0173	1,1550
	0,0150	0,0242	0,0275	0,0261	0,0181	1,6500
	0,0172	0,0279	0,0307	0,0272	0,0184	4,6200
	0,0180	0,0280	0,0316	0,0284	0,0195	5,7750
21^k,023	0,0229	0,0393	0,0456	0,0444	0,0303	0,2817
	0,0232	0,0396	0,0457	0,0432	0,0310	0,3397
	0,0232	0,0396	0,0464	0,0438	0,0311	0,4278
	0,0242	0,0398	0,0475	0,0452	0,0316	0,9625
	0,0245	0,0404	0,0480	0,0454	0,0328	1,9250

Rilevasi da questi risultati:

1.° *Che in generale aumentano gli abbassamenti dei diversi punti del trave al crescere della velocità del carico.* Sono gli aumenti insensibili e quasi trascurabili per tutte le velocità minori di un metro per ogni minuto secondo, qualunque sia il peso in moto; si conservano sempre piccoli anche per quelle di due e tre metri al secondo, se il carico è molto piccolo; sempre però si fan maggiori nelle velocità superiori, e sono rimarchevoli quelli ottenuti per la velocità di otto metri al secondo con 3,109 e 7,109 chilogrammi di carico.

L'aumentare dell'abbassamento di ogni punto del trave al crescere della velocità del carico, mal si concepisce senza ricorrere a delle cause accidentali, come sarebbero le irregolarità del piano su cui si muove il corpo, o le imperfezioni nei pezzi che comunicano il moto. Non esistendo nelle nostre esperienze la prima di queste cagioni era forza supporre la seconda, e quindi dubitare che non fosse perfetto il centramento dei perni che sorreggevano il carico. Posto di fatti nuovamente al tornio il cilindro noi osservammo un leggerissimo discentramento, all'influenza del quale potendo in certo modo attribuirsi il fenomeno procurammo che il difetto fosse tolto più che si poteva dall'arte, e ripetemmo l'esperienze col carico di $7^k,109$. Eccone i resultati ottenuti:

Abbassamento dei punti					Velocità del carico
C	B	A	B'	C'	
0,0081	0,0142	0,0152	0,0149	0,0103	0,2686
0,0085	0,0143	0,0164	0,0157	0,0103	0,4125
0,0083	0,0143	0,0156	0,0152	0,0099	0,5775
0,0081	0,0136	0,0152	0,0149	0,0103	1,1000
0,0081	0,0138	0,0152	0,0149	0,0103	1,6500

In questa Tavola nella quale le velocità sono cresciute da 1 a 8 circa, gli abbassamenti sono rimasti possiam dire gli stessi. Lo che proverebbe che si dovesse ritenere: non influire in generale la velocità del carico sull' incurvamento che prende il trave per la sua azione: ma non potendosi nelle cose d' arte raggiungere mai la perfezione necessaria alla conferma di tal conseguenza, si vede che l' aumento della velocità porterà sempre un nocivo effetto sul trave che trovasi costretto ad incurvarsi maggiormente.

2.° *Che gli abbassamenti verso i punti estremi del trave sono anche sotto piccole velocità molto grandi a confronto di quelli che si hanno nel mezzo.* A far resultare ciò con maggiore evidenza, conviene confrontarli con quelli che si hanno a peso fermo. Si osservino a tal' oggetto i numeri registrati nella tavola che segue, ove gli abbassamenti corrispondenti alla velocità zero sono quelli ottenuti col peso che ha agito sul trave per sola pressione.

Pesi	Abbassamento dei punti C	B	A	B'	C'	Velocità del Carico
3k,109	0,0035	0,0056	0,0062	0,0056	0,0037	0,4125
	0,0023	0,0059	0,0066	0,0062	0,0028	0,0000
7k,109	0,0083	0,0131	0,0149	0,0142	0,0096	0,4125
	0,0061	0,0133	0,0155	0,0147	0,0074	0,0000
11k,765	0,0140	0,0232	0,0266	0,0245	0,0170	0,4225
	0,0099	0,0224	0,0251	0,0243	0,0131	0,0000
21k,023	0,0232	0,0396	0,0464	0,0438	0,0311	0,4278
	0,0184	0,0369	0,0485	0,0414	0,0223	0,0000

Abbiamo scelto in questa tavola le piccole velocità, e che possono dichiararsi eguali pei quattro pesi correnti; poichè nell' esperienze prime essendosi ritrovato l' asse del cilindro non perfettamente centrato rispetto ai perni che sostenevano il carico non sarebbero state giuste le deduzioni che seguono se le velocità assunte fossero state maggiori. Di più volendo noi stabilire un criterio pel caso in cui le imperfezioni della locomozione dei carichi sieno più che è possibile evitate, e nel quale abbiamo veduto non influire sensibilmente la velocità, era necessario che si tenesse conto del solo carico e potesse riguardarsi costante la velocità medesima.

Resulta intanto dal confronto suddetto che gli abbassamenti prodotti dal peso in moto sono maggiori verso le estremità e quasi eguali verso il mezzo a quelli corrispondenti al peso fermo. Se confrontassimo questi ultimi colle flessioni ottenute dal medesimo carico avente gran velocità troveremmo le differenze molto più sensibili, ed anche al mezzo sarebbero le prime più grandi.

Noi prenderemo a parlare in prima di questo secondo fenomeno, e dopo dell' altro: e cominceremo coll' avvertire che gli abbassamenti nei punti B', C' che sono i primi premuti dal peso corrente, sono costantemente maggiori di quelli ottenuti nei punti corrispondenti B, C; il che essendo inverosimile nel caso in cui il solido fosse di uniforme resistenza in tutta la sua lunghezza, accenna un difetto esistente nella prima metà del trave e non altro. Una prova l' abbiamo dal confronto degli abbassamenti al disotto dell' orizzontale de' cinque punti osservati, mentre il solido è naturalmente incurvato per effetto del proprio peso, e che sono i seguenti:

C	B	A	B'	C'
$0^m,0211$	$0^m,0286$	$0^m,0343$	$0^m,0314$	$0^m,0249$

ed un' altra dagli abbassamenti ottenuti in questi punti a peso fermo e notati nella tavola precedente. Si può adunque ritenere che l'abbassamento in ciascuno di quei punti intermedj sia la media de' due corrispondenti ai punti egualmente distanti dal mezzo.

Con questi noi possiamo esprimere anche gli abbassamenti a peso corrente registrati nella precedente tavola, mediante una curva. Assumendo la verticale che passa in (A) per asse delle y, e l'orizzontale che unisce gli appoggi per asse delle x, l'origine essendo nell'incontro di queste due rette, può la curva anzidetta esser rappresentata dall' equazione:

$$(1) \qquad y = a + b x^2 + c x^4 + d x^6$$

ove le quantità a, b, c, d saranno in generale funzioni del carico in moto, della sua velocità, e della reazione elastica del trave.

Indicando con β^1 l'ordinata del punto (A), con β_2 e β_3 la media dell' ordinate dei punti (B), (B') e (C), (C'); con β_4 quella di un appoggio; e con α_1, α_2, α_3, α_4 le corrispondenti ascisse, fatto il calcolo conveniente si trova:

$$\begin{aligned}
a &= \beta_1 - \alpha_1^2 \delta_1 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 (\gamma_1 - \varepsilon_1 \alpha_3^2) + \alpha_1^4 \alpha_2^2 \varepsilon_1 \\
b &= \delta_1 - (\alpha_2^2 + \alpha_1^2)(\gamma_1 - \varepsilon_1 \alpha_3^2) + \varepsilon_1 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \\
c &= \gamma_1 - \varepsilon_1 (\alpha_3^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1^2) \\
d &= \varepsilon_1
\end{aligned}$$

nelle quali espressioni abbiamo posto:

$$\delta_1 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}; \quad \delta_2 = \frac{\beta_3 - \beta_2}{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}; \quad \delta_3 = \frac{\beta_4 - \beta_3}{\alpha_4^2 - \alpha_3^2}$$

$$\gamma_1 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\alpha_3^2 - \alpha_1^2}; \quad \gamma_2 = \frac{\delta_3 - \delta_2}{\alpha_4^2 - \alpha_2^2}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\alpha_4^2 - \alpha_1^2}$$

Ora si dovrebbero applicare queste formule alle nostre esperienze in cui

$$\alpha_1 = 0\,,\ \alpha_3 = 2\alpha_2\,,\ \beta_4 = 0\,;$$

determinare i valori di a, b, c, d per le piccole e grandi velocità di un solo carico; per i piccoli e grandi carichi con una medesima velocità. Forse saria necessario far variare anche le dimensioni del trave, e ritrovare i valori delle stesse quantità corrispondenti ad un medesimo carico che si muove con una data velocità. Queste tre serie d'esperienze somministrerebbero la legge con cui variano i parametri della curva rappresentata dall'equazione (1) al variare degli elementi suddetti, e quindi sarebbe facile determinare per ciascheduna la corrispondente espressione algebrica. Ciò non puossi ottenere dalle nostre esperienze, che essendo dirette come sopra abbiam detto a stabilire più particolarmente dei criterj generali utili per chi avesse maggiore agio e più estesi mezzi di studiare questo soggetto, non sono in numero sufficientemente grande e rispetto ai carichi adoprati e rispetto alla velocità, e sono state eseguite sovra un solo pezzo. Nondimeno per dare un saggio del partito utile che si può trarre dall'equ. (1), noi abbiamo calcolato i valori di a, b, c, d nel caso delle più piccole velocità comuni ai quattro carichi, e che si può ritenere essere il caso in cui soltanto varia il peso corrente.

Pesi	Valori dei coefficienti				Velocità
	a	b	c	d	
k	—	+	—	+	
3,109	0,04045	0,00734	0,00126	0,00012	0,4125
7,109	0,04919	0,00819	0,00135	0,00011	0,4125
11,769	0,06086	0,01069	0,00144	0,00012	0,4225
21,023	0,08171	0,01394	0,00150	0,00012	0,4278

Da questi valori resulta intanto che l' equ. (1) è atta a rappresentare la curva che passa per l' estremità delle ordinate o abbassamenti prodotti nei diversi punti del regolo, perchè non può avere nè sinuosità nè punti singolari fra i due appoggi, ma volge sempre la sua concavità all' asse dell' ascisse. Vedesi inoltre che essi vanno crescendo al crescere del peso corrente: quelli di *a* in una proporzione maggiore di quella con cui crescono i valori di *b*; per questi avviene lo stesso in confronto ai valori di *c*, i quali pochissimo crescono; e quei di *d* sembrano costanti. Il poco numero delle esperienze ci vieta il proferire un giudizio più esatto sulle variazioni di questi valori, ma basterà per ora avere accennato in generale una via sicura per ritrovarlo.

Anche la curva inviluppante le curve prese dal trave per sola pressione del carico posato successivamente sopra diversi punti di esso può esser rappresentata dalla stessa equazione (1). Se si calcolano infatti i suoi coefficienti *a*, *b*, *c*, *d* per mezzo delle formule sopra accennate e co' dati registrati nelle tavole precedenti che corrispondono a questo caso trovasi:

Pesi	Valori dei coefficienti			
	a	b	c	d
k	—	+	—	+
3,109	0,04093	0,00719	0,00059	0,000045
7,109	0,04979	0,00819	0,00063	0,000044
11,765	0,05936	0,00987	0,00064	0,000037
21,023	0,08280	0,01634	0,00101	0,000044

I quali danno luogo alle medesime osservazioni fatte a proposito di quelli spettanti alla curva inviluppante tutte le curve prese dal regolo nelle successive posizioni del carico che muovesi con piccola velocità. Il confronto poi di questi co' coefficienti di quella ci indurrebbe a credere che potessero entrambe le curve ritenersi identiche pei primi due termini, poichè solo i coefficienti c e d dell' ultima inviluppante sono molto più piccoli di quelli che spettano all' altra corrispondente al peso in moto. Di quanto interesse possa dunque essere per la scienza l' istituire numerose ed accurate esperienze su questo soggetto, ognuno ora sel vede. La legge con cui variano i coefficienti a, b, c, d, al variare de' carichi e della velocità per un medesimo trave, una volta scoperta, noi avremo fatto un gran passo nell' investigazione della resistenza dei corpi alla flessione.

L'altro fenomeno resultante dal confronto delle flessioni ottenute verso l' estremità del trave per mezzo del carico in moto con quelle che lo stesso carico produceva per sola pressione non è di minor momento. Sembra che esso debba ripetersi dalle oscillazioni, che necessariamente si eccitano nel trave. Per collegarlo quindi colla teoria converrebbe introdurre nei calcoli le dottrine di queste, ed allora dalle formule potrebbe anche meglio dedursi con quali leggi quell' aumento di flessione vada crescendo. Noi che ci siamo proposti di fare un lavoro più sperimentale che teorico, ci contenteremo di fare apprezzare l' effetto di questo fenomeno coi calcoli più semplici. A tal' oggetto calcolando l' aumento per i punti più vicini all' estremità, cioè per (C) o (C'), e per essere più esatti prenderemo la media delle flessioni, si trovano per i pesi $3^k,109$; $7^k,109$; $11^k,765$; $21^k,023$ gli aumenti $0^m,0010$; $0^m,0022$; $0^m,0040$; $0,^m0067$ che sono proporzionali ai carichi. Nella economia delle macchine e delle grandi costruzioni, importa moltissimo questo resultato. Poichè in un solido che cimentato alla flessione sostiene un carico senza rompersi, potrebbe la rottura avvenire se questo carico si muovesse con una certa velocità sovra di esso. Ma egli è facile stabilire un criterio che determini in ogni caso il limite dei pesi correnti, i quali possono muoversi con diverse velocità sovra un trave orizzontale senza pericolo di rottura. Ritenendo infatti le stesse denominazioni b, c, $2\,l$ per indicare la larghezza, l'altezza, e la lunghezza del trave, ed essendo:

R il coefficiente alla rottura,

x la distanza variabile di un punto qualunque del solido da uno degli appoggi,

Q lo sforzo necessario a romperlo in questo punto, abbiamo

$$Q = R\,\frac{b\,c^2\,(2l)}{6\,x\,(2l - x)}$$

Gli aumenti di flessione sovra notati possono esprimersi in chilogrammi, in grazia della nota legge di proporzionalità fra gli sforzi e gli abbassamenti. Cosicchè essendo

P il peso corrente

f l'abbassamento che produrrebbe in un dato punto del solido per semplice pressione

$f + \triangle f$ l'abbassamento che in quello produce allorchè è in moto

ω il peso fermo che misura l' abbassamento $\triangle f$

avremo: $\omega = \dfrac{P\,\triangle f}{f}$ e quindi, $P\left(1 + \dfrac{\triangle f}{f}\right) < Q$

sarà il criterio cercato.

Abbiamo però veduto che gli aumenti $\triangle f$ crescono proporzionalmente ai pesi correnti, e possono perciò esprimersi con $\varkappa\,P$: abbiamo inoltre $f = E\,\dfrac{4\,b\,c^3}{(2l)^3}$, onde la relazione precedente diverrà:

$$P\left(1 + \varkappa\,E\,\frac{4\,b\,c^3}{(2l)^3}\right) < R\,\frac{b\,c^2\,(2l)}{6\,x\,(2l - x)}$$

la quale dovrà essere sempre sodisfatta acciocchè la rottura non avvenga.

Facendo eguali i membri di questa disuguaglianza, si può determinare il peso che percorrendo il trave con una certa velocità, sarebbe capace di romperlo allorchè passa sovra un determinato punto di esso. È però da avvertirsi che il coefficiente $\varkappa$ non può esser costante al variare della qualità dei legni in esame, ed occorrerebbe determinarlo almeno per le specie più in uso nelle grandi costruzioni, ed anche per i metalli e particolarmente pel ferro. Per il solido da noi adoprato si ha $\varkappa = 0{,}000322$, essendo $x = 1{,}^{m}155$. Prendendo poi $R = 6885000$ chil. come ci vien dato per l' abete bianco che è la specie del nostro trave, e colla formula

$$E = \frac{6}{7}(P_1 - P)\frac{(2l)^3}{4bc^3(f_1 - f)}$$

da noi determinata nella sopracitata memoria ricercando il valore di E, che si è trovato eguale a $949017515^{k}{,}3$ resulta dal calcolo, che con uno sforzo premente al punto $x = 1{,}^{m}155$ di Chil. 266,855 il trave si rompe, e che è sufficiente a romperlo un peso corrente su di esso eguale a chil. 240,19 allorchè passa pel medesimo punto. E più generalmente si trova che per rompere in tal modo il nostro solido è sufficente un peso corrente che raggiunga i $^{9}/_{10}$ di quello che per sola pressione lo romperebbe. È questo un semplice resultato di calcolo e del quale non può farsi un gran conto. Poichè importa assai l' avvertire:

1.° Che il criterio sopra stabilito è buono nel caso che il sistema di locomozione sia così perfetto da non far variare sensibilmente gli abbassamenti prodotti dal peso corrente sia con poca, sia con grande velocità.

2.° Che l' ipotesi della proporzionalità fra gli sforzi, e gli abbassamenti prodotti, se può ritenersi buona per i piccoli, non lo è egualmente per i grandi e in special modo per quei vicini alla rottura.

3.° Che i solidi cimentati non sono mai esenti da quei difetti naturali, i quali alterando l' omogeneità che sempre supponesi perfetta nello stabilire le formule, diminuiscono assai il valore della resistenza, che il pratico loro attribuisce ricorrendo alle tavole dei respettivi coefficenti.

4.° Le avarie del tempo, per il contatto continuo di essi coll' atmosfera, non che il continuo trovarsi cimentati alla flessione, inducono necessariamente una diminuzione non indifferente nella loro resistenza, particolarmente se trattasi di legname. Cagioni tutte sono queste che importano un valore maggiore al primo membro della diseguaglianza non ha guari stabilita, e facendo più grande il pregio di quell' aumento d' azione da noi ritrovato e prodotto dai pesi correnti, invitano i costruttori scienziati a ripetere simili esperimenti con l' estensione dei mezzi a loro concessi dall' arte.

Abbiamo dall' esperienze precedenti dedotto che gli abbassamenti al mezzo del trave ottenuti dal peso corrente sono per le piccole velocità pressochè eguali a quelli somministrati dal peso istesso agente per sola pressione. Al crescere poi della velocità faceansi i primi un poco maggiori dei secondi; e questo abbiamo veduto doversi attribuire all' imperfetto centramento dei perni sostenitori del carico. Infatti, nell' ipotesi che l' asse orizzontale di uno di quei perni, o di tutti e due non fosse stato perfettamente sul prolungamento dell' asse di rotazione del cilindro, il punto d' applicazione del carico avrebbe descritto attorno al centro della corrispondente base del cilindro un circolo di raggio uguale alla distanza fra i due assi, mentre il cilindro ruotava sul trave. Talchè all' azione ordinaria del carico corrente sul trave si unisce in questo caso una serie di urti che si ripetono ad intervalli eguali, potendo evidentemente ritenersi che ad ogni rivoluzione del cilindro, quello cade pel diametro del piccol cerchio descritto dal suo punto di applicazione.

Per l' assoluta ignoranza, in cui eravamo della resistenza viva che i solidi sostenuti oppongono agli urti ricevuti in direzione normale alla loro lunghezza, la considerazione superiore ci mosse a investigarla nelle verghe prismatiche di legno, attenendoci solo al caso in cui l'urto si fa al mezzo della lunghezza del solido. Nel paragrafo secondo di questa memoria, abbiamo esteso le ricerche per quanto i mezzi cel concedevano: ora la soluzione di quel problema tornerà utilissima per confermare non solo il nostro presupposto nel caso del carico in moto, ma anche per darci in parte la misura dell' abbassamento nel punto di mezzo del trave. A tal uopo noi abbiam fatto alcune esperienze portando fuori dell' asse del cilindro i punti d' applicazione del carico d'una quantità conosciuta, e che abbiamo chiamato *discentramento*. Dei resultati di queste noi offriamo solo quelli ottenuti con due carichi che hanno percorso il trave con differente velocità, e sotto tre discentramenti diversi. La semplicità del nostro mezzo di locomozione ci ha impedito di crescere ulteriormente il discentramento o il carico, e talvolta la velocità di quello in azione per la complicanza degli effetti prodotti, i quali erano urti trasversali e obliqui all'orizzonte comunicati al trave, e rimbalzi del carico massime nelle grandi velocità. Tali cagioni alterando evidentemente i resultati di cui andavamo in traccia doveano da noi evitarsi per quanto era possibile. Nei numeri trascritti nella tavola seguente e che misurano gli abbassamenti ottenuti nei soliti cinque punti del trave, crediamo non potersi ammettere il concorso di simili alterazioni.

Carico	Abbassamenti ottenuti nei punti					Velocità del carico	Discentramento
	(C)	(B)	(A)	(B')	(C')		
k	m	m	m	m	m		m
3,109	0,0035	0,0058	0,0068	0,0063	0,0036	0,2406	0,0030
	0,0035	0,0058	0,0069	0,0063	0,0038	0,3850	
	0,0042	0,0069	0,0074	0,0075	0,0042	0,6417	
	0,0045	0,0072	0,0082	0,0075	0,0044	1,9250	
	0,0075	0,0107	0,0100	0,0128	0,0078	4,6200	
	0,0078	0,0113	0,0114	0,0130	0,0080	5,7750	
7,109	0,0084	0,0136	0,0158	0,0147	0,0106	0,2750	0,0030
	0,0096	0,0156	0,0170	0,0166	0,0110	0,4813	
	0,0097	0,0166	0,0178	0,0178	0,0119	1,6500	
	0,0110	0,0171	0,0195	0,0190	0,0142	2,8880	
	0,0243	0,0188	0,0234	0,0234	0,0211	5,7750	
3,109	0,0036	0,0059	0,0070	0,0066	0,0042	0,2750	0,0076
	0,0038	0,0067	0,0096	0,0073	0,0045	0.5500	
	0,0078	0.0131	0,0152	0,0147	0,0099	0,8250	
	0,0090	0,0146	0,0167	0,0157	0,0102	0,9625	
7,109	0,0084	0,0173	0,0218	0,0192	0,0122	0,4442	0,0076
	0,0134	0,0214	0,0262	0,0242	0,0166	1,0500	
3,109	0,0051	0,0095	0,0106	0,0102	0,0066	0,2458	0,0136
	0,0069	0,0121	0,0126	0,0121	0,0076	0,5775	
	0,0086	0,0139	0,0160	0,0143	0,0092	0,7218	

Abbiamo voluto trascrivere anche gli abbassamenti nei punti intermedi del trave perchè sia manifesto come l'azione del peso corrente nel caso del discentramento non contraddice alle generalità offerteci negli altri casi. Per la qual cosa il confronto di questi con gli abbassamenti ottenuti nel caso di inapprezzabile o nullo discentramento può darci idea del suo maggiore effetto. Paragoniamo difatti le frecce al punto (A) di questa con quelle della prima tavola del presente paragrafo ottenute col medesimo peso, e troveremo le prime tutte maggiori delle seconde tanto più quanto le velocità sono grandi. Il confronto però dovrebbe farsi con le frecce corrispondenti al carico perfettamente centrato, nel qual caso le abbiamo viste essere costanti colle velocità, ed eguali alla freccia prodotta dallo stesso carico agente per sola pressione. E noi attenendoci a questo partito esprimeremo la freccia al punto (A) con la somma di due termini il primo de' quali misurerà la porzione di freccia corrispondente al peso fermo; il secondo l'aumento di essa prodotto dall'urto del peso stesso per la sua eccentricità rispetto alla ruota o cilindro che lo trasporta.

Onde chiamato f l'abbassamento totale, P il peso corrente, e posto

$$\frac{1}{\phi}=\left\{\frac{0,5P^{1}+0,316\,p}{P}-1\right\}\left\{1+0,5\frac{p}{P}\right\}$$ ove P^{1}, e p

hanno le medesime denominazioni che nel paragrafo secondo; $\lambda=\frac{1}{E}\;\frac{(2\,l)^{3}}{4\,b\,c^{3}}$, sarà:

$$F=\lambda.P+\phi.A+\varepsilon$$

essendo A l'altezza da cui può intendersi caduto il carico ad ogni rivoluzione del cilindro, ed ε la correzione del termine $\phi\;A$ data alla fine del paragrafo citato.

Or qui è da notare che non tutto il carico corrente produce urto nel trave, ma solo quello aggiunto al cilindro il quale pesa un chilogrammo. Talchè essendo in generale p^{1} il peso del cilindro dovrassi a P sostituire $P-p^{1}$ nel calcolo del valore di ϕ e di ε.

La quantità A deve essere una funzione dell'eccentricità del carico, e della sua velocità. È facilissimo determinare questa funzione nell'ipotesi, sempre ammissibile, che la caduta del peso si faccia pel diametro del circolo descritto dal suo punto d'applicazione, e in grazia del brevissimo istante di tempo in cui accade si consideri il moto come uniforme. Ritenendo pertanto che $2\,l$ sia la lunghezza del trave, e detto:

r il raggio del cilindro ruotante

π il rapporto del diametro alla circonferenza

t il tempo impiegato dal cilindro nel percorrere il trave

t' quello di una sola rivoluzione di esso, avremo evidentemente:

$$t' = \frac{\pi \, r \, t}{l}$$

Indicando inoltre con:

e l'eccentricità del carico

v la velocità della sua caduta

w la velocità uniforme del cilindro sul trave ed osservando che $^1/_2\, t'$ è il tempo della caduta sarà:

$$A = \frac{v^2}{2\,g} = \frac{8\,e^2\,l^2}{g\,\pi^2\,r^2\,t^2} = \frac{2\,e^2\,w^2}{g\,\pi^2\,r^2}$$

e quindi:

$$F = \lambda\,P + \frac{2\,\Phi}{g\,\pi^2\,r^2}\,e^2\,w^2 + \varepsilon$$

Il raggio del cilindro è nel nostro caso $r = 0^m{,}053$, e il peso del trave $p = 19^k{,}620$. Col primo di questi valori e cogli altri altrove trascritti si sono calcolate le altezze A da sostituirsi nel secondo termine della formula superiore, nel quale sono stati calcolati colla nota proporzione i valori di P' che devono essere le misure degli aumenti di freccia espressi dal secondo e terzo termine delle nostre formule, ma somministrati dall' esperienza. Poichè gli abbassamenti al mezzo del trave fatti per pressione dai carichi $3^k{,}109$, e $7^k{,}109$ sono $0^m{,}0066$; $0^m{,}0155$ e gli aumenti notati sono la differenza di questi abbassamenti con quelli registrati nella tavola precedente, e rappresentano la quantità f dell'espressione di ε data nel paragrafo secondo. I resultati di tali calcoli sono scritti nel quadro seguente.

Pesi correnti	Velocità	Valori di A	Aumenti di frecce: Sperimentali	Aumenti di frecce: Calcolati	Differenze	Discentramento
k		m	m	m	m	m
3,109	0,2406	0,0000041	0,0002	0,01009	0,00989	0,003
	0,3850	0,0000101	0,0003	0,00998	0,00968	
	0,6417	0,0000288	0,0008	0,00729	0,00649	
	1,9250	0,0002587	0,0016	0,00616	0,00456	
	4,6200	0,0014941	0,0034	0,00409	0,00069	
	5,7750	0,0023345	0,0048	0,00475	—0,00005	
7,109	0,2750	0,0000053	0,0003	0,00805	0,00775	0,003
	0,4813	0,0000162	0,0015	0,00673	0,00523	
	1,6500	0,0001906	0,0023	0,00330	0,00100	
	2,8880	0,0005839	0,0030	0,00346	—0,00004	
	5,7750	0,0023345	0,0079	0,00800	0,00010	
3,109	0,2750	0,0000333	0,0004	0,00600	0,00560	0,0076
	0,5500	0,0001331	0,0035	0,00425	0,00125	
	0,8250	0,0002997	0,0086	—0,00110	*	
	0,9625	0,0004076	0,0101	—0,00280	*	
7,109	0,4442	0,0000868	0,0063	0,00443	—0,00187	0,0076
	1,0500	0,0004851	0,0107	0,00995	—0,00075	
3,109	0,2458	0,0000852	0,0040	0,00507	0,00107	0,0136
	0,5775	0,0004702	0,0060	0,00439	—0,00161	
	0,7218	0,0007346	0,0094	—0,00150	*	

Non sono per verità troppo felici i resultati che ci offre questa tavola nella sesta colonna; pure dà luogo ad un' osservazione che non è di piccol conto per appoggiare l' utilità della formula sopra stabilita, ed è questa. Le differenze più notevoli si riscontrano là dove corrispondono altezze minimissime e non ammissibili in pratica. Per esse il termine φA della nostra formula che è tutto teorico, non ha valore apprezzabile, e non influisce per nulla sull' aumento cercato. Il quale vien perciò somministrato per intiero dalla quantità ε essenzialmente empirica, e che abbiamo riconosciuta generalmente erronea per A eguale a zero, o tale da ritenersi nulla nella pratica. Mentre le differenze medesime sono piccolissime ed inapprezzabili ove i valori di A cominciano a esser sensibili. Quindi possiamo credere che la formula stabilita valga se non altro ad offrire una soluzione approssimata nella pratica dell'effetto prodotto dai carichi in moto sopra i travi sostenuti orizzontalmente nelle loro estremità. E convien dire approssimata, poichè in quella non è fatta parola nè della velocità acquistata dal trave d'alto in basso, nè della reazione che sviluppa ad ogni istante di basso in alto; in breve dell'effetto delle oscillazioni provenienti da tutte e due le predette cause, e che non possono fare a meno di non turbare in qualche modo quella semplice azione che noi abbiamo attribuito al carico in moto. Ma tali alterazioni e perturbamenti è difficilissimo se non impossibile determinare in numeri; e posto anche riuscisse per un caso non varrebbe in un altro, perchè accadono troppo irregolarmente. Quando però i carichi fossero maggiori del peso del trave, allora può ritenersi che queste oscillazioni abbiano poca influenza; e la nostra formula corrisponderà meglio al suo scopo.

Concludiamo:

1.° È provata esatta dall'esperienza la relazione tra il peso che flette al mezzo un trave per sola pressione e quello che lo flette di egual quantità nell'essere lasciato libero a se stesso appena è stato posato sul trave senza velocità acquistata: il primo peso P' è doppio del secondo π quando si può trascurare il peso p del trave, e si ha $\pi = {}^1/_2 \cdot P' + {}^{19}/_{30}\, p$ negli altri casi.

2.° La formula che si stabilisce colla teoria partendosi dalle leggi dell'urto dei corpi molli

$$f = \frac{A}{\left(\frac{0{,}5\,P' + 0{,}316\,p}{P} - 1\right)\left(1 + 0{,}5\,\frac{p}{P}\right)}$$

è dall'esperienza provata sufficientemente esatta per dare la flessione f che si produce in un trave da un corpo che vi cade sopra da una certa altezza A, allorquando il peso del trave è presso a poco eguale al peso P del corpo che può urtarlo nel mezzo.

3.° Per stabilire teoricamente la formula generale che risolva in ogni caso il precedente problema converrebbe introdurre nelle leggi dell'urto la reazione elastica, facendo su questa le ipotesi richieste dal trave cimentato, e tener conto delle perdite di forza che si fanno contro i sostegni. Pei travi di legno noi abbiamo dedotto dall'esperienza i seguenti termini da aggiungersi al secondo membro della precedente equazione:

$$\varepsilon = 1{,}564 \left(\frac{P}{p} - 1\right) - 0{,}056 \frac{P}{p} \sqrt{A} + 0{,}0104$$

4.° Un carico corrente sovra un trave sorretto alle due estremità produce in esso verso i due estremi un' incurvamento notabilmente più grande di quello che si avrebbe se il carico fosse nei diversi punti semplicemente posato. La curva inviluppante di tutte le curve che va formando il trave mentre passa il carico da un estremo all' altro è determinata dall' equazione:

$$y = d\,x^6 - c\,x^4 + b\,x^2 - a$$

ove le quantità a, b, c, d sono tutte positive e van crescendo al crescere dei carichi come noi abbiamo semplicemente accennato per quattro soli di essi.

5.° La medesima equazione può rappresentare l' inviluppante di tutte le curve formate dal trave per la sola pressione esercitata successivamente da un carico nei suoi diversi punti; i coefficienti variando nel modo istesso. Resulta dalle nostre esperienze che se quel carico si muovesse con poca velocità, sarebbero i coefficienti a, e b uguali nell' uno e nell'altro caso, e notabilmente più piccoli gli altri due c e d nel caso del carico fermo.

6.° L' eccesso d' incurvamento che si ha verso gli estremi del trave per il correre del carico può facilitarne la rottura, la quale accadrà ogni qual volta non sia

$$P\left(1+\varkappa E\frac{4bc^3}{(2l)^3}\right)<R\frac{bc^2.(2l)}{6x(2l-x)}$$

Questa condizione non sarebbe stata verificata sul solido da noi sperimentato se il peso corrente fosse stato 0,9 del peso che fermo avrebbe prodotto la rottura.

7.° Cresce l' incurvamento del trave in ogni punto al crescere della velocità del peso corrente per effetto di urti che inevitabilmente si producono in direzione normale al trave medesimo.

8.° Una cagione di questi urti può essere il discentramento del peso che rotola, ed allora all' effetto del carico che corre sovra il trave aggiungendosi quello delle sue cadute successive sul trave stesso, può il problema risolversi colla formula

$$F=\lambda P+\varphi A+\varepsilon$$

9.° Allorquando tutte le cause accidentali produttrici di urti contro il trave fossero tolte dal meccanismo di locomozione dei carichi, le flessioni del trave sarebbero indipendenti dalla velocità, ma sempre differenti da quelle a peso fermo come abbiamo sopra avvertito.

G. Peri.